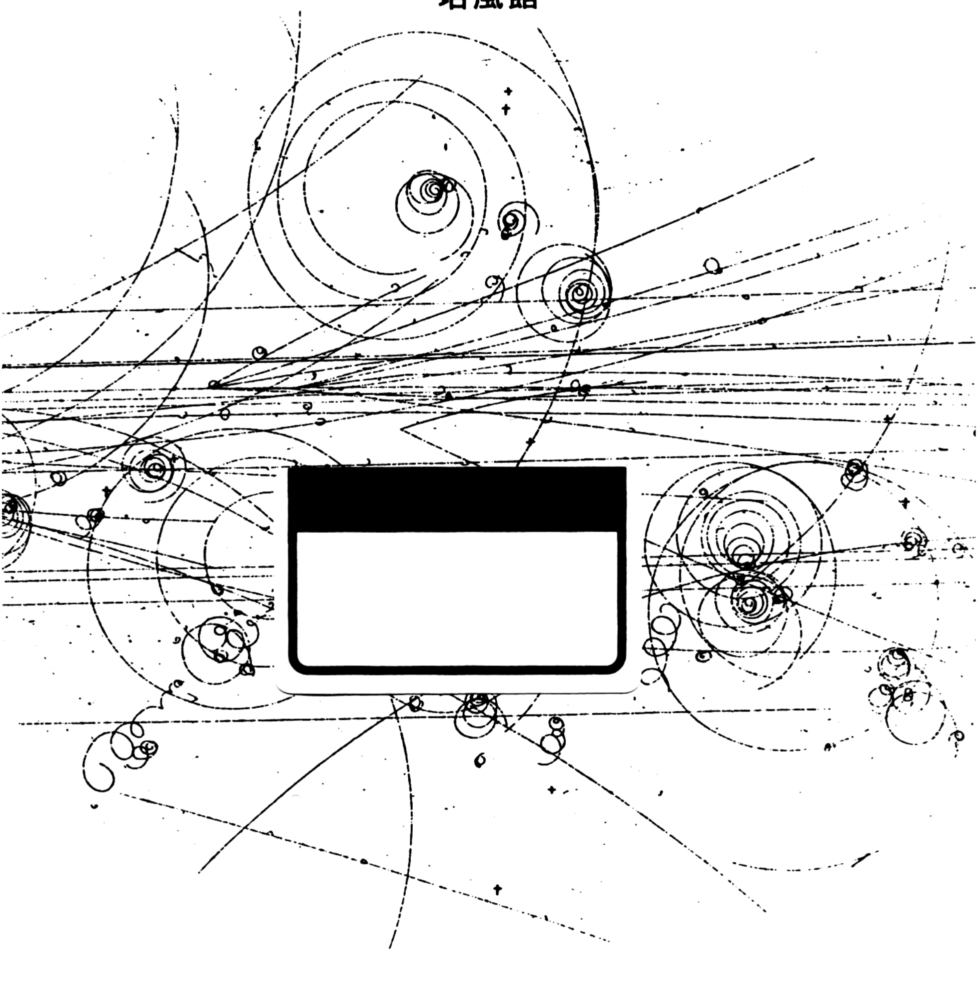
物理学基礎シリーズ

9

場の量子力学

石川健三著

培風館



本書の無断複写は，著作権法上での例外を除き，禁じられています。
本書を複写される場合は，その都度当社の許諾を得てください。

物理学基礎シリーズ

刊行にあたって

21世紀に向けて，科学技術は目ざましい進歩を遂げている。物理学が，その基礎を支える学問として，以前にもまして重要な役割を果していることは今更言うまでもないことであろう。物理学は，今世紀初頭に量子力学と相対性理論の発見という2大革命を経験した。それらの広範な応用が進む一方，古典論を含めた物理学の理解はさらに深まり，新しい現象やそれを解明するための理論が活発に研究されている。

しかしながら残念なことに，生き生きとした物理学を伝えることは大変難しい。大学の授業においては時間的な制限もあり，講義はややもすると型通りになりがちである。それを補うべき教科書・参考書では取り扱う課題が多いため，事実の羅列となって無味乾燥な印象を与えることが多い。

このような状況のもとで，物理学を志す諸君，あるいは関連の理工系分野に進む学生諸君のために「物理学の核心」を紹介したいと念願して企画されたのが，この「物理学基礎シリーズ」である。新しい視点に立って基礎的テーマを選び，その内容を検討する。実験事実と物理法則，そして，それらを繋ぐ論理的筋道を，真の興味をもって理解できるようていねいに解説していきたい。

以上の観点から，現代の物理学を把握するうえで必要な基本的科目を選び，全11巻を構成した。その内容は，

1．力学	2．解析力学
3．電磁気学	4．熱・統計力学
5．振動・波動	6．相対性理論
7．量子力学	8．固体物理

9．場の量子力学　10．素粒子物理学
11．物理数学

である。大学理工系 1～4 年生を対象としている。大学での授業進行とあわせて読み進むのがわかりやすいと思う。その際，巻の番号は必ずしも講義の順番とは一致していないことを注意しておこう。一方，各巻はそれぞれ独立に勉強できるので，ある程度の学力をもった意欲的な学生諸君はどの巻からでも挑戦してもらいたい。

各巻の執筆者は，今日我が国の物理学界を代表する中堅・若手研究者である。また，教育にも多くの経験をもつ。これらの第一線物理学者を執筆者として，充実した内容とともに，物理学の研究や教育に対するフィロソフィを学びとれる雰囲気をもった従来にない新鮮な教科書を目指した。他の教科書には書かれていないやや高度な内容も少し含まれている。一度読んですべてを理解することはたぶん不可能であろう。わからないところはくり返し読むことによって，理解を深めてほしい。むしろ，わかったこととわからないことを区別する態度が重要であり，その意味で先を急ぐ必要はない。

古典物理学の枠組みの中でさえ，多くの重要な発見が続いている。また，物理学がすべて確立されたものとは考えられない。量子論の発見者であるプランク（M. Planck, 1858-1947）に関して有名な逸話がある。大学卒業のとき，物理学の研究をしたいと申し出たプランクに対して，指導教官は「物理学にはもう重要な問題は残されていない」と言ったという。物理学の将来を考えるうえで，大変興味深い教訓であると思う。

本シリーズをまとめるにあたって，編者は全巻の原稿を読み，執筆者に再三注文をつけた。快く改稿に協力いただいた執筆者に感謝する。また，培風館編集部から示された見解も活用させてもらった。お礼を申し上げたい。

1993 年 1 月

編 集　和達　三樹
米谷　民明

序

本書は，大学4年生から大学院1年生程度の物理系の学生が場の量子力学についての基礎から基本的な応用までを学べるように書かれた教科書である。

現代物理学において，場は物質と相補的な役割を担っている。普遍的な現象をつかさどっている基本的な力の場は，ミクロな世界からマクロな世界にわたる広い分野で物質の運動をきめる。ミクロな世界では，物質も場として振る舞い，力の場と物質の場はたがいに強く相関する。ミクロな世界でこれらの従う力学が，場の量子力学である。

さて，普遍的であるものを理解するのは，やさしいだろうか？ いつでも，どこでも共通に成り立つ事柄の理解は，やさしそうで難しいことが多い。特に，新たな普遍的な事柄を習う際は，多くの場合困難が伴う。一つの法則や原理が様々な現象の原因となり，これに関与する事柄は非常に多い。そのため，これを理解しさらに使いこなせるようになると，その後では様々な局面で大きな威力を発揮する。ところで，物理学の一つの特徴は，新たな概念が法則や方程式とともにいっきに導入されることが多いことである。この点が，物理の難しさを示すとともに，物理のダイナミックな側面を表している。そのため，新たな物理法則を習う過程では，大きな障壁がありそれを乗り越えるために相当の努力が求められる。たくさんの演習問題を解くとともに，様々な考察や思考実験を自ら進めることが重要であり，また新たな観点に立ってすべての現象を見直すような態度と努力が必要であろう。

教科書には多くの演習問題が与えれているほうがよいのだが，総頁数の条件から，数は限られてしまった。しかし本文の説明をできるだけ具体的に，面倒な式の変形や数学的な導出をできるだけ丁寧に行った。また，量子化については，正準形式に則って話をほぼ一貫して進めた。そのため，拘束系を含む力学の正

準形式を初めに取り上げ，その延長線上で電磁場や非可換ゲージ場を扱った。

一見形式的に見える方法が，現実的な計算に役立つことが多い。逆に，現実的な計算をより簡単に行うために，発達した形式も多い。形式的に見える方法や法則がもつ深い物理的な意味や，具体的な計算に含まれる物理的な内容を理解することが重要である。

本書の最初の章で，予備知識となる解析力学と量子力学の簡単なまとめを与え，2 章で古典電磁気学の復習を与えた。これらを十分に修得している読者は，1，2 章を省略して差し支えない。3 章から場の量子力学の本論が始まる。本書では，相対論的に不変な物理系と非相対論的な物理系をともに扱った。前者は真空中における物理や高エネルギーにおける物理に対応して，後者は固体などの物質中における物理に対応する。場の量子力学が扱う物理系は，無限の自由度を含むため，無限個の粒子状態が数個のパラメーターで互いに関係する。そのため，計算で求め予言することが可能な物理量は無限個ある。この点が，すべての章に共通する。

この本の執筆を薦めていただいた和達三樹，米谷民明両氏，ならびに培風館松本和宣氏に感謝いたします。最後に，いつも筆者を励まし続けた家族に感謝の意を表します。

2006 年 5 月 札幌 にて

石 川 健 三

目　　次

1章　力　　学

場の力学を論ずるにあたり，予備知識として必要となる解析力学や量子力学のいくつかを簡単にまとめておこう。

1.1　解析力学

質点の力学はニュートンの運動の3法則でまとめられる。第一法則は慣性の法則，第二法則は運動方程式，第三法則は作用-反作用の法則である。これらの法則を通して，物体の運動が普遍的に理解される。物理的な考え方の原点は，力学にあるといえる。

マクロな物体が時間とともに位置を変える現象は，身近であるため直感的に理解することが比較的やさしい。位置を決めるための物差しと時間を決めるための時計が使われて現象が記述される。位置を決める物差しは，容易に動かせて複数のものを比較でき，また容易に長さを測定できる。しかし，時間を決める時計は，実は難しい問題を含んでいる。それぞれの時計が運動で変わらず一様に進むとわかっているときは問題ないが，時計の進み方が運動で変わるときは深刻な事態が引き起こされる。時計の進み方が運動で変わることは，特殊相対論で考察されることであり，場の理論では必須な考えである。しかし，本書ではしばらくこの効果を無視し，時計が運動で変わらず一様に進むとする。この仮定が，第一法則である慣性の法則を保証している。慣性の法則は，力が働かない物体が等速度運動をすると述べる。これは，共通な時計があることを述べるとともに，共通な時間があることを暗黙な了解事項としている。

第二法則は，物体の加速度が質量と力の概念でとらえられることを述べる。しかし，質量とは何か，力とは何かがあらかじめ別の場所で与えられているわけではない。質量も力もニュートンの運動方程式に基づいて初めて確固とした概念が与えられる。物理における概念の導入はこのようにいっきになされることが多い。まず一段目で定義がなされ，次に二段目でそれらが従う関係式が証明されるというのは，ユークリッド幾何学の論理展開方法である。しかし物理の法則は，概念の導入とそれらが従う関係式が切り離せないことが多い。

第三法則は，ある物体 A が他の物体 B に力 $\boldsymbol{F}$ を及ぼす際には，同時に逆の関係が成立し，物体 B が物体 A に力 $-\boldsymbol{F}$ を及ぼすというものである。これは，形を変えない物体の性質を示すものであるとともに，物体 A と物体 B とを含めた全系に外力が加わらないときには，全体で慣性の法則に従うことを示している。

第一法則と第三法則の内容は，一見簡単であるが実は奥が深いものである。ここでは，これ等についてこれ以上言及することはしない。しかし，第二法則を様々な形で表すことは，後の古典論から量子論へと展開する際の議論や考察で不可欠である。それが解析力学である。ニュートンの運動方程式がもつ様々な側面を明らかにし，物体の運動をより掘り下げることになる。

質量 m の質点は，位置を $\boldsymbol{x}(t)$，働く力を $\boldsymbol{F}$ とすると，ニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

に従い，加速度が力に比例し質量に反比例して位置が変化する (図 1.1)。

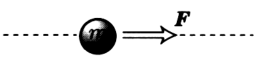


図 1.1 力と加速度

身近なところにある力の多くは，保存力である。保存力は空間座標 $\boldsymbol{x}$ における力のベクトルの各成分が，関係式

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U(x) \tag{1.2}$$

で一つの関数 $U(x)$ の勾配として導かれるものである。デカルト座標では，成分は

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial x_i}U(x) \tag{1.3}$$

となっている。この場合に運動方程式を変形すると，エネルギーが時間とともに変化せず一定に保たれるエネルギー保存則，

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\right)^2 + U(x) \tag{1.4}$$

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\cdot\left[m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{F}\right] = 0 \tag{1.5}$$

が成立していることがわかる。エネルギー E はスカラー量であり，$t = t_0$ で運動の初期条件が決まると，エネルギーの値が決まる。このとき，任意の t での位置や速度も一意的に決まり運動が完全に決まる。エネルギーはいつも同じ値である。一つの運動ではエネルギーは時間によらない定数であるが，運動エネルギー $\frac{m}{2}(\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t))^2$ やポテンシャルエネルギー $U(x)$ のそれぞれの値は時間とともに変化する。

エネルギーの式は，1 階の微分を含み 2 階微分をもたない。だから，エネルギーの式は，位置座標の時間についての 1 階微分方程式とみなされる。そのため，2 階の微分方程式であるニュートンの運動方程式を解くよりも，エネルギーの式を解くほうがやさしい。

1.1.1 ラグランジアンと作用積分

力学のすべては，ニュートンの運動方程式で尽くされているが，微分形ではなく積分形に基づいて運動を記述して力学の法則を新たな形で論ずることができる。そのために運動の法則として**最小作用の原理**をとる。最小作用の原理では，実際の運動は，質点の位置 $\boldsymbol{x}(t)$ の汎関数である作用積分を停留的にさせている。積分と微分が逆の演算であることから，運動に関してこのような考えが適用できるのは自然なことである。また，この原理から，微分形に基づくニュートンの運動方程式を導くことができるだけでなく，より広い観点から力学を論ずることができる。

まず，ニュートンの運動方程式を導く。作用積分がスカラー量でありすべての軌道の情報を担うため，最小作用の原理から，微分方程式，変数の性質，境界条件等の運動に関するすべてが導かれる。

位置 $\boldsymbol{x}(t)$ が時間の関数として与えられたとき，この関数の値や時間についての微分から運動エネルギーやポテンシャルエネルギーが決まる。これらを差し引いて得られるのが，ラグランジアン

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\right)^2 - U(\boldsymbol{x}) \tag{1.6}$$

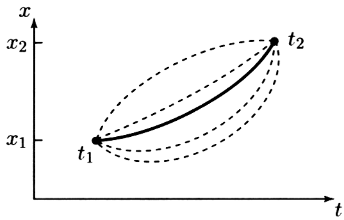


図 1.2　作用積分を停留的とする古典解

であり，さらにラグランジアンを時間で積分した汎関数が作用積分

$$S[\boldsymbol{x}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dtL \tag{1.7}$$

である。積分は時刻 t_1 での位置 $\boldsymbol{x}_1$ と時刻 t_2 での位置 $\boldsymbol{x}_2$ を通る軌道の汎関数として図 1.2 のように表せ，時刻の上限ならびに下限，それから，$\boldsymbol{x}(t)$ に依存して値を変える。そこでこの作用積分が停留的となるのはいかなるときであるかを調べる。このため，$\boldsymbol{x}(t)$ が微小変化したときの作用積分の微小変化量である変分

$$\delta S[\boldsymbol{x}(t)] = S[\boldsymbol{x}(t) + \delta\boldsymbol{x}(t)] - S[\boldsymbol{x}(t)] \tag{1.8}$$

を計算する。変分は微少量 $\delta\boldsymbol{x}(t)$ の 1 次までで，

$$\begin{aligned}
&\delta S[\boldsymbol{x}(t)]\\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2}\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) + \delta\boldsymbol{x}(t)\right)^2 - U(\boldsymbol{x}(t) + \delta\boldsymbol{x}(t)) - \frac{m}{2}\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\right)^2 + U(x)\right]\\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{x}(t)\right) - \delta\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{x}(t))\right]
\end{aligned} \tag{1.9}$$

と求まる。$\boldsymbol{x}(t)$ の時間微分の項を部分積分により $\delta\boldsymbol{x}(t)$ に比例する項に書き換える。その結果，変分は領域内部における $\delta\boldsymbol{x}(t)$ により決まる項と境界での値

$$\delta S[\boldsymbol{x}(t)] = -\int_{t_1}^{t_2} dt\delta\boldsymbol{x}(t)\left(m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{x}(t))\right) + \left[m\delta\boldsymbol{x}(t)\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\right]\Bigg|_{t_1}^{t_2} \tag{1.10}$$

と分かれる。よって，作用積分が停留的となるのは，

$$\begin{gathered}
m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{x}(t)) = 0, \quad t_1 \le t \le t_2\\
\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = 0, \quad t = t_1, t_2
\end{gathered} \tag{1.11}$$

が満たされるときである。式 (1.11) で一つめの式は，積分領域の内部でのオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \tag{1.12}$$

であり，二つめの式は端での境界条件である。境界条件は領域の外部が何もない場合の自由端のものである。オイラー・ラグランジュ方程式はニュートンの運動方程式に一致する。このように，作用積分に対する変分原理からニュートンの運動方程式が導かれる。この方法の利点は，力学変数で書かれた作用からすべてが求まることである。この点，位置ベクトルについての微分方程式であるニュートンの運動方程式よりも取り扱いやすい。例えば，デカルト座標以外の座標系でニュートンの運動方程式を求めるのには，面倒で注意深い考察が必要であるが，ラグランジアンを使う作用積分に基づいて運動方程式を求めるのは，機械的な考察ですむ。これは見通しがよい。

(1) 点変換

変数 q_i のかわりに変換した変数 Q_i を使いラグランジアンを表そう。変数関係が

$$q_i = q_i(Q_i) \tag{1.13}$$

であるとしよう。すると時間微分は

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i(Q_i)}{\partial Q_j}\dot{Q}_j \tag{1.14}$$

となる。このためラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2}\sum(\dot{q}_i)^2 - U(q_i) = \frac{m}{2}\sum_{ij} g_{ij}\dot{Q}_i\dot{Q}_j - \widetilde{U}(Q_j) \tag{1.15}$$

$$g_{ij} = \sum \frac{\partial q_l(Q_l)}{\partial Q_i}\frac{\partial q_l(Q_l)}{\partial Q_j} \tag{1.16}$$

$$\widetilde{U}(Q_j) = U(q_i(Q)) \tag{1.17}$$

となり，これを時間積分した作用積分は

$$S = \int dt \left(\frac{m}{2}\sum_{ij} g_{ij}\dot{Q}_i\dot{Q}_j - \widetilde{U}(Q_j)\right) \tag{1.18}$$

となる。このラグランジアンや作用から Q_i を力学変数としたオイラー・ラグランジュ方程式を求めれば，欲しい微分方程式が得られる。一般座標の場合には，g_{ij} が力学変数 Q_i に依存するため，微分方程式は一見複雑になる。

次に具体的な例を考察する。

(2) 極座標

球対称ポテンシャル $U(r)$ が働く質点の運動を記述する球座標での運動方程式を求めよう。デカルト座標で与えられたラグランジアン

$$L = \frac{m}{2}\sum \dot{x}_i{}^2 - U(r) \tag{1.19}$$

に極座標の関係式 (図 1.3)

$$\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{e}_r \tag{1.20}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi \tag{1.21}$$

を代入して，動径座標 r と角度座標 θ, ϕ を変数とするラグランジアン

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin\theta^2\dot{\phi}^2) - U(r) \tag{1.22}$$

を得る。角度 ϕ の時間微分を含み ϕ そのものを含まないラグランジアンより，変数 r, θ, ϕ に関するオイラー・ラグランジュ方程式が

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = mr(\dot{\theta}^2 + \sin\theta^2\dot{\phi}^2) - \frac{\partial U(r)}{\partial r} - m\frac{d^2 r}{dt^2} = 0 \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 - m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = -m\frac{d}{dt}(r^2\sin\theta^2\dot{\phi}) = 0 \tag{1.25}$$

と得られる。方程式は複雑であるが，物理系の対称性を反映して，ϕ がラグランジアンに含まれない。これが，最後の方程式に反映された結果 p_ϕ が時間によらず一定になっている。

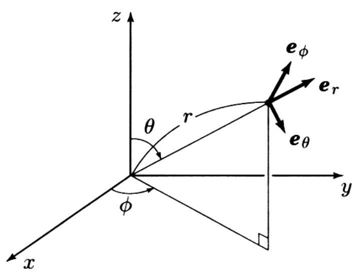


図 1.3 極座標

1.1.2 ハミルトニアン

ラグランジアンは位置座標と速度で決まる。ラグランジアンより，$x_i(t)$ に共役な正準運動量 $p_i(t)$ は

$$p_i = \frac{\delta}{\delta \dot{x}_i} L \tag{1.26}$$

と求まる。式 (1.6) の場合,

$$p_i = m\dot{x}_i(t) \tag{1.27}$$

となる。ラグランジアンでは自変数として座標 $x_i(t)$ と速度 $\dot{x}_i(t)$ が使われ，微少量が

$$dL = \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} d\dot{x}_i \tag{1.28}$$

で与えられる。

運動量を独立な変数として扱い，自変数を共役運動量 p_i と座標 x_i に変換しよう。このためのルジャンドル変換でハミルトニアンが,

$$H = p_i \dot{x}_i - L \tag{1.29}$$

となり，微少量が

$$\begin{aligned} dH &= dp_i \dot{x}_i + p_i d\dot{x}_i - dL \\ &= dp_i \dot{x}_i + p_i d\dot{x}_i - \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} d\dot{x}_i \\ &= dp_i \dot{x}_i - \frac{\partial L}{\partial x_i} dx_i \\ &= dp_i \dot{x}_i - \dot{p}_i dx_i \end{aligned} \tag{1.30}$$

となる。ここで H は今の場合,

$$H = \frac{p_i^2}{2m} + U(x_i) \tag{1.31}$$

となる。式 (1.30) より， ハミルトニアンを使う運動方程式が座標と運動量で対称な形

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{1.32}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \tag{1.33}$$

で与えられる。座標 q_i と運動量 p_i が自変数であるので，ラグランジュ形式で p_i の定義式として扱われた式が，ハミルトン形式では運動方程式となっている。

1.1.3 ポアッソン括弧

ハミルトニアン形式では，座標と運動量に対して対称の形で方程式が書かれる。これをさらにわかりやすく示すのにポアッソン括弧を使うのが便利である。

二つの物理量 $A(q,p)$ と $B(q,p)$ とのポアッソン括弧は，$A(q,p)$ と $B(q,p)$ の正準変数 q_i, p_i に関する微分から決まり

$$\{A,B\}_{PB} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i} \right) \tag{1.34}$$

である。正準変数のポアッソン括弧は，

$$\{q_l, p_m\}_{PB} = \delta_{lm}, \quad \{q_l, q_m\}_{PB} = 0, \quad \{p_l, p_m\}_{PB} = 0 \tag{1.35}$$

であり，任意の物理量に対してポアッソン括弧は，反対称で線形な性質

$$\{A,B\}_{PB} = -\{B,A\}_{PB} \tag{1.36}$$

$$\{\lambda A + \mu B, C\}_{PB} = \lambda\{A,C\}_{PB} + \mu\{B,C\}_{PB} \tag{1.37}$$

と分配則

$$\{AB,C\}_{PB} = A\{B,C\}_{PB} + \{A,C\}_{PB}B \tag{1.38}$$

を満たす。ここで λ と μ は定数である。このような単純な代数関係を満たすことから，ポアッソン括弧が力学系にとって大きな役割をすることが想像できる。

x_i と p_i との運動方程式はポアッソン括弧を使い

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}_{PB} \tag{1.39}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}_{PB} \tag{1.40}$$

と表せ，さらに p と q の関数である任意の物理量 A の時間変化がポアッソン括弧を使い

$$\begin{aligned}\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i &= \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} \\ &= \{A,H\}_{PB}\end{aligned} \tag{1.41}$$

と簡単に表せる。このように，複雑な方程式が簡単な代数的な形で表せることに特徴がある。

さらに3個の物理量から計算されるポアッソン括弧は，特殊な代数的関係式であるヤコビの恒等式

$$\{\{A,B\}_{PB},C\}_{PB} + \{\{B,C\}_{PB},A\}_{PB} + \{\{C,A\}_{PB},B\}_{PB} = 0 \tag{1.42}$$

を満たしている。ヤコビの恒等式は，一見すると無味乾燥な関係式であるように見えるが，豊富な内容を含む代数的な関係式である。まず，具体的な計算でヤコビの恒等式が成り立つことを確かめよう。上の定義から

$$\{\{A,B\}_{PB},C\}_{PB} + \{\{B,C\}_{PB},A\}_{PB} + \{\{C,A\}_{PB},B\}_{PB} \tag{1.43}$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial\{A,B\}_{PB}}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial\{A,B\}_{PB}}{\partial p_i}\frac{\partial C}{\partial q_i} + \frac{\partial\{B,C\}_{PB}}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\right.$$

$$-\frac{\partial\{B,C\}_{PB}}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q_i}+\frac{\partial\{C,A\}_{PB}}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial\{C,A\}_{PB}}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\Bigg)$$

である。ここで最初の項を計算すると,

$$\begin{aligned}&\{\{A,B\}_{PB},C\}_{PB}\\&=\sum_i\left(\frac{\partial\{\{A,B\}_{PB}}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_i}-\frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial\{\{A,B\}_{PB}}{\partial p_i}\right)\qquad(1.44)\\&=\sum_j\sum_i\left[\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\right)\frac{\partial C}{\partial p_j}-\frac{\partial C}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\right)\right]\end{aligned}$$

となる。ここで A,B,C をサイクリックに順番を変えて求めると

$$\begin{aligned}&\{\{B,C\}_{PB},A\}_{PB}\\&=\sum_i\left(\frac{\partial\{\{B,C\}_{PB}}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}-\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial\{\{B,C\}_{PB}}{\partial p_i}\right)\qquad(1.45)\\&=\sum_j\sum_i\left[\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_i}-\frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}\right)\frac{\partial A}{\partial p_j}-\frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_i}-\frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}\right)\right]\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}&\{\{C,A\}_{PB},B\}_{PB}\\&=\sum_i\left(\frac{\partial\{\{C,A\}_{PB}}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial\{\{C,A\}_{PB}}{\partial p_i}\right)\qquad(1.46)\\&=\sum_j\sum_i\left[\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}-\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_i}\right)\frac{\partial B}{\partial p_j}-\frac{\partial B}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}-\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_i}\right)\right]\end{aligned}$$

が得られる。これらはすべて, A, B と C の q や p による 2 階微分と 1 階微分の積の和になっている。そこで, A の 2 階微分の項に着目して計算すると,

$$\sum_j\sum_i\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial A}{\partial q_i}\left[\frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial C}{\partial p_j}-\frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial C}{\partial p_j}\right]=0\qquad(1.47)$$

$$\sum_j\sum_i\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial A}{\partial p_i}\left[-\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_j}+\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_j}\right]=0\qquad(1.48)$$

$$\sum_j\sum_i\frac{\partial}{\partial p_j}\frac{\partial A}{\partial p_i}\left[\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial q_j}-\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial q_j}\right]=0\qquad(1.49)$$

となり, すべて打ち消して 0 となる。ヤコビの恒等式は A,B と C について反対称であるので, 上の結果は B や C の 2 階微分の項についても成り立つ。結局完全にすべてが打ち消されて恒等的に 0 になることがわかる。

1.1.4 正準変換

ラグランジアンによる力学形式では，座標 q_i を点変換して得られる変数 Q_i を新たな座標とみなすことができた。これより Q_i に対するオイラー・ラグランジュの微分方程式を導くことができた。座標と運動量が対称に扱われる正準形式では，q_i と p_i がともに自変数であるので，これらを混合するより広い変換に対する不変性がある。うまい変換を使うことにより，運動が簡単に求まることがある。そのため，正準変数の性質を保つ変換，正準変換，の一般の形を調べておくことが必要である。この正準変換は，あとで考察するゲージ理論の正準形式や量子化に際しても積極的に使われるものである。

元の正準変数を q_i, p_i とし新たな変数を P_i, Q_i とする。ここで変数間には関数関係

$$P_i = P_i(q,p), \quad Q_i = Q_i(q,p) \tag{1.50}$$

が成立しているとする。これらが，正準変数であるとき特別の条件を満たしている。これを求める。

これらが正準変数であることの特徴は，物理系の作用が変数の特別な組合せで，

$$S = \int \left(\sum_i p_i \, dq_i - H(q,p)\, dt \right) \tag{1.51}$$

と書けることである。新たな正準変数 Q_i と P_i に関しても同じ物理系の作用が，

$$S = \int \left(\sum_i P_i \, dQ_i - \widetilde{H}(Q,P)\, dt \right) \tag{1.52}$$

と書けるはずである。この両者は一つの関数の全微分だけ異なるとき，同じ方程式を表し同等である。だからこの関数の任意性を残して，

$$\sum_i p_i dq_i - H(q,p)dt = \sum_i P_i dQ_i - \widetilde{H}(Q,P)dt + dF \tag{1.53}$$

となるとき異なる作用が同じ系を表している。関数 F が q と Q の関数であり時間に依存しないとすると，

$$dF = \frac{\partial F}{dq_i} dq_i + \frac{\partial F}{dQ_i} dQ_i \tag{1.54}$$

と書ける。これを上の式に代入して，

$$\sum_i p_i dq_i - H(q,p)dt - \sum_i P_i dQ_i + \widetilde{H}(Q,P)dt = \frac{\partial F}{dq_i} dq_i + \frac{\partial F}{dQ_i} dQ_i \tag{1.55}$$

なる微分式の関係式が得られる。さらにこの微分式から，関係式

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \tag{1.56}$$

$$P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \tag{1.57}$$

$$H(q,p) = \widetilde{H}(Q,P) \tag{1.58}$$

が得られる。関数 $F(q,Q)$ を通して上の式で変数 q_i から変数 Q_i への変換が決まり，またハミルトニアンの関係式が得られるので，この関数を母関数という。一つの関数 $F(q_i,Q_j)$ の q_i での微分や Q_j での微分が運動量 p_i や P_j となる点，保存力の定義を思い出させる。さらに両辺を微分することから，

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q_j \partial q_i} \tag{1.59}$$

$$\frac{\partial P_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial Q_j} \tag{1.60}$$

を得る。これより，正準変換の条件式

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \tag{1.61}$$

が得られる。

ここまでは，母関数が変数 q,Q の関数であるとして話を進めてきた。母関数が別の変数依存性をもつときは，少し異なる結果を導くこととなる。

さらに作用積分式 (1.52) から作用の変分

$$\delta S = \int\left(\sum_i \delta P_i \dot{Q}_i - \delta Q_i \dot{P}_i - \frac{\partial \widetilde{H}(Q,P)}{\partial Q_i}\delta Q_i - \frac{\partial \widetilde{H}(Q,P)}{\partial P_i}\delta P_i\right)dt \tag{1.62}$$

が求まり，変分原理からあらたな正準変数に関する運動方程式が

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial P_i} \tag{1.63}$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q_i} \tag{1.64}$$

と導かれる。ここで

$$\widetilde{H}(Q,P) = H(q(Q,P),p(Q,P)) \tag{1.65}$$

とする。ところで運動方程式は一般に，式 (1.41)

$$\dot{Q}_i = \{Q_i, \widetilde{H}\}_{PB} \tag{1.66}$$

$$\dot{P}_i = \{P_i, \widetilde{H}\}_{PB} \tag{1.67}$$

であり，右辺の具体的な計算からポアッソン括弧が，

$$\{Q_i, \widetilde{H}\}_{PB} = \{Q_i, Q_l\}_{q,p}\frac{\partial H}{\partial Q_l} + \{Q_i, P_l'\}_{q,p}\frac{\partial H}{\partial P_l'} \tag{1.68}$$

$$\{P_i, \widetilde{H}\}_{PB} = \{P_i, P_l\}_{q,p}\frac{\partial H}{\partial P_l} + \{P_i, Q_l\}_{q,p}\frac{\partial H}{\partial Q_l} \tag{1.69}$$

と求まる。よって，正準変数に関する運動方程式が上の方程式 (1.63), (1.64) に一致するため，

$$\{Q_l, Q_i\}_{q,p} = 0 \tag{1.70}$$

$$\{Q_i, P_l'\}_{q,p} = \delta_{ll'} \tag{1.71}$$

$$\{P_l, P_i\}_{q,p} = 0 \tag{1.72}$$

となっている。これが正準変換の条件式であるといえる。このようにして，変数 Q_i, P_i についての作用積分が式 (1.52) と書けることは，この変数に対する非常に強い条件を与えることとなっている。

1.1.5 正準変換とポアッソン括弧ならびにリウビルの定理

正準変換では，任意な物理量のポアッソン括弧が不変に，すなわち

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P} \tag{1.73}$$

となっている。これを具体的な計算で確認する。q_i, p_i から Q_i, P_i への変数変換をすると左辺は，

$$\begin{aligned}
\{f, g\}_{q,p} &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) \\
&= \sum_i \left(\left(\frac{\partial f}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial q_l} + \frac{\partial f}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial Q_l'}\frac{\partial Q_l'}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial P_l'}\frac{\partial P_l'}{\partial p_i}\right)\right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\partial g}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial Q_l'}\frac{\partial Q_l'}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial P_l'}\frac{\partial P_l'}{\partial p_i}\right)\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial Q_l}\frac{\partial g}{\partial Q_l'}\{Q_l, Q_l'\}_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial P_l}\frac{\partial g}{\partial P_l'}\{P_l, P_l'\}_{q,p} \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial Q_l}\frac{\partial g}{\partial P_l'}\{Q_l, P_l'\}_{q,p} - \frac{\partial g}{\partial Q_l}\frac{\partial f}{\partial P_l'}\{Q_l, P_l'\}_{q,p}
\end{aligned} \tag{1.74}$$

ここで式 (1.70), (1.71), (1.72) を使うことにより，

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P} \tag{1.75}$$

を得る。

また位相体積

$$\int \Pi\, dq_i dp_i \tag{1.76}$$

を変数変換した位相空間では

$$\int \Pi \, dQ_i dP_i D \tag{1.77}$$

$$D = \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(Q_i, P_i)} \tag{1.78}$$

となるが，変数変換のヤコビアン D は

$$D = \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(Q_i, P_i)} = \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(q_i, Q_i)} \Big/ \frac{\partial(Q_i, P_i)}{\partial(q_i, Q_i)} = \frac{\partial(p_i)}{\partial(Q_i)} \Big/ -\frac{\partial(P_i)}{\partial(q_i)} \tag{1.79}$$

と表せる。ここで，母関数による変換式を分母と分子に代入して，

$$D = \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial Q_j}\right) \Big/ \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial Q_j}\right) = 1 \tag{1.80}$$

が得られる。このように正準変換のヤコビアンは 1 であり

$$\int \Pi dq_i dp_i = \int \Pi dQ_i dP_i \tag{1.81}$$

となる。$q_i(t)$, $p_j(t)$ から $q_i(t+\tau)$, $p_j(t+\tau)$ への変換は正準変換である。これに上の式を適用して得られる関係式

$$\int \Pi dq_i dp_i = \int \Pi dq_i(\tau) dp_i(\tau) \tag{1.82}$$

すなわち位相体積が時間とともに不変であることをリウビルの定理という。

1.1.6 座標の関数としての作用積分

作用積分は，ラグランジアンを時間積分した，

$$S[t] = \int_{t_0}^{t} L[q(t'), \dot{q}(t')] dt' \tag{1.83}$$

で与えられる。いま積分の上限を t とする。作用の変分

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i dt \tag{1.84}$$

で，最小作用の原理を考える場合は，座標 $q(t')$ は時刻 t' で任意の値をとるとして作用の変分を考えた。ここでは，座標 $q(t')$ がオイラー・ラグランジュ方程式を満たし，

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{1.85}$$

となっている場合を考察する。このとき，

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t} \tag{1.86}$$

となり，

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \tag{1.87}$$

である。

作用が時刻 t や t における座標 $q = q(t)$ の関数としていかなる性質をもつだろうか?　まず作用の定義から，自明に成立する関係式は，

$$\frac{d}{dt}S[t] = L \tag{1.88}$$

である。次に作用を時刻 t と座標 $q(t)$ の関数と考えた場合

$$\frac{d}{dt}S = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i\dot{q}_i \tag{1.89}$$

となる。右辺第 1 項めの t に関する偏微分は，q を固定して t を変化させたときの変化率を意味し, 右辺第 2 項めの q に関する偏微分は，逆に t を固定して q を変化させたときの変化率を意味する。式 (1.88) と (1.89) から

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i\dot{q}_i = -H(p_i, q_i) \tag{1.90}$$

が得られる。つまり，作用を時間で偏微分するとハミルトニアンが得られる。ハミルトニアン H は座標 q_i と運動量 p_i を自変数とする関数である。関係式 (1.87) は，作用を座標で偏微分すると運動量が得られることを示す。

式 (1.90) に式 (1.87) を代入して，作用に関する偏微分方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \cdots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = 0 \tag{1.91}$$

が得られる。この方程式をハミルトン・ヤコビ方程式とよぶ。

1.1.7　拘束系の正準形式

本書で扱う多くの力学系では，正準変数の組 q_i, p_i $(i = 1, \cdots, n)$ の一部が独立ではなく，付加的な束縛条件 (拘束条件) を満たす。このような力学系を考察しておこう。

いま対象とする力学系で m 個の拘束条件が

$$\phi_a(p_i, q_i) = 0, \quad a = 1, \cdots, m \tag{1.92}$$

と与えられ，ハミルトニアンが

$$H(p_i, q_i) \tag{1.93}$$

と表されているとする。ここで，拘束条件とハミルトニアンは閉じた代数をなし，

$$\{\phi_a, H(p_i, q_i)\}_{PB} = \sum_b C_{ab}\phi_b \tag{1.94}$$

を満たしているとする。

拘束条件が簡単であるときは，条件を具体的に解くことができる。解いた後では，拘束条件に無関係な実の変数だけで力学系を記述すれば，通常の正準形式が忠実に適用できる。しかし拘束条件が複雑である場合には，条件を簡単に解くことはできない。この際の常套的な手段は，ラグランジュの未定定数を使うことである。未定定数 $\lambda(x)_a$ $(a = 1, \cdots, m)$ を導入してハミルトニアンを再定義することにより条件つきの力学系が記述できる。これを今から考察することにする。

未定定数 $\lambda(x)_a$ $(a = 1, \cdots, m)$ を含む新たなハミルトニアン

$$H(p_i, q_i)' = H(p_i, q_i) + \sum_{a=1}^{m} \lambda_a(x)\phi_a(x) \tag{1.95}$$

から運動方程式は，

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H'}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{a=1}^{m} \lambda_a(x)\frac{\partial \phi_a(x)}{\partial p_i} \tag{1.96}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H'}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{a=1}^{m} \lambda_a(x)\frac{\partial \phi_a(x)}{\partial q_i} \tag{1.97}$$

となる。力学変数からなる一般の物理量 $f(p_i, q_i)$ に対しては，運動方程式は

$$\dot{f}(p_i, q_i) = \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \tag{1.98}$$

となり，右辺の $\dot{p}_i, \dot{q}_i$ に運動方程式を代入して，

$$\begin{aligned}\dot{f}(p_i, q_i) &= \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H'}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H'}{\partial q_i} \\ &= \{f(p, q), H'(p, q)\}_{PB} \\ &= \{f(p, q), H(p, q)\}_{PB} + \sum_{a=1}^{m} \lambda_a(x)\{f(p, q), \phi_a(x)\}_{PB}\end{aligned} \tag{1.99}$$

が得られる。物理量 $f(p_i, q_i)_{\text{ゲージ不変}}$ は拘束条件との間に

$$\{f(p, q), \phi_a(x)\}_{PB} = 0 \tag{1.100}$$

となるとき，ゲージ不変であるという。また，この物理量をゲージ不変量であるとよぶ。ゲージ不変量は，未定定数によらない運動方程式，

$$\dot{f}(p_i, q_i)_{\text{ゲージ不変}} = \{f(p, q)_{\text{ゲージ不変}}, H(p, q)\}_{PB} \tag{1.101}$$

を満たすことがわかる。また，拘束条件の時間微分は，

$$\dot{\phi}_a = \{\phi_a, H\}_{PB} + \sum_{b=1}^{m} \lambda_b(x)\{\phi_a, \phi_b\}_{PB} \tag{1.102}$$

である。

ここでラグランジュの未定定数 $\lambda(x)_a$ $(a = 1, \cdots, m)$ を決定しよう。上の拘束条件の間のポアッソン括弧がもつ性質により場合分けがなされる。ここでは，拘束条件の代数が閉じている場合を考える。

$$\{\phi_a, \phi_b\} = \sum_c C_{abc}\phi_c \tag{1.103}$$

$$\{\phi_a, H\} = \sum_b C_{ab}\phi_b \tag{1.104}$$

この場合式 (1.102) で $\lambda(x)_a$ $(a = 1, \cdots, m)$ の係数が 0 になってしまう。そのため，$\lambda(x)_a$ $(a = 1, \cdots, m)$ が任意の値で上の式が成立し，$\lambda(x)_a$ $(a = 1, \cdots, m)$ をこの式から決めることはできない。この場合，**ゲージ固定**なる新たな条件をさらに付加することで未定係数を決定する。ゲージ固定として新たな条件，

$$\chi_b(p_i, q_i) = 0 \tag{1.105}$$

を課すことにする。この条件式の時間微分は，

$$\dot{\chi}_b = \{\chi_b, H\}_{PB} + \sum_a \lambda_a\{\chi_b, \phi_a\}_{PB} \tag{1.106}$$

となる。そのため上の式から λ_a が決まるためには，行列 $\{\phi_a, \chi_b\}_{PB}$ の逆行列が存在すること， すなわち行列 $\{\phi_a, \chi_b\}_{PB}$ からつくられる行列式が 0 にならないこと，

$$\det\{\phi_a, \chi_b\}_{PB} \neq 0 \tag{1.107}$$

が必要である。χ_a どうしの関係として後で述べる理由で，

$$\{\chi_a, \chi_b\}_{PB} = 0 \tag{1.108}$$

としておくと都合がよい。さて，束縛条件を解いて条件を消去した変数のつくる空間を Γ^* とし，力学変数を $\{p_b^*, q_b^*\}$ としておく。さらに，もとの変数 $\{p_i, q_i\}$ から変数 $\{p_b^*, q_b^*\}$ を含む次のような新たな変数 $\{P_i, Q_i\}$ への正準変換がわかったとしよう。

$$\{p_i, q_i\} \to \{P_i, Q_i\} \tag{1.109}$$

$$P_a = \chi_a \quad (a = 1, \cdots, m), \quad P_b = p_b^* \quad (b = m+1, \cdots, n) \tag{1.110}$$

$$Q_a = \text{未定}, \qquad Q_b = q_b^* \quad (b = m+1, \cdots, n) \tag{1.111}$$

これらの変換が正準変換であるとき，

$$\{Q_i, Q_j\}_{PB} = 0, \quad \{P_i, P_j\}_{PB} = 0, \quad \{Q_i, P_j\}_{PB} = \delta_{ij} \tag{1.112}$$

$$\{\chi_a, \phi_c\}_{PB;p,q} = \{\chi_a, \phi_c\}_{PB;P,Q} = \{P_a, \phi_c\}_{PB;P,Q} = -\frac{\partial \phi_c}{\partial Q_a} \tag{1.113}$$

となる。これより，行列に関する条件

$$\det\{\chi_a, \phi_c\}_{PB} = \det\left|\frac{\partial \phi_c}{\partial Q_a}\right| \neq 0 \tag{1.114}$$

は拘束条件 (1.92) が未定の Q_a について原理的に解けることを示している。求まった Q_a は他の変数の関数になっているはずである。これを，

$$Q_a = Q_a(p_b^*, q_b^*) \tag{1.115}$$

と表す。すると Γ^* でのハミルトニアン $H^*(p_b^*, q_b^*)$ が

$$H^*(p_b^*, q_b^*) = H(p_i, q_i)|_{Q_a = Q_a(p_b^*, q_b^*), P_a = 0} \tag{1.116}$$

と求まり，運動方程式が決まる。運動方程式は

$$\dot{q}_b^* = \frac{\partial H(P_a, Q_a, p_b^*, q_b^*)}{\partial p_b^*} + \sum \lambda_a \frac{\partial \phi_a(P_a, Q_a, p_b^*, q_b^*)}{\partial p_b^*} \tag{1.117}$$

$$\dot{p}_b^* = -\frac{\partial H(P_a, Q_a, p_b^*, q_b^*)}{\partial q_b^*} - \sum \lambda_a \frac{\partial \phi_a(P_a, Q_a, p_b^*, q_b^*)}{\partial q_b^*} \tag{1.118}$$

$$\dot{Q}_a = \frac{\partial H(P_a, Q_a, p_b^*, q_b^*)}{\partial P_a} + \sum \lambda_a \frac{\partial \phi_a(P_a, Q_a, p_b^*, q_b^*)}{\partial P_a} \tag{1.119}$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_a &= \dot{\chi}_a \\ &= -\frac{\partial H(P_a, Q_a, p_b^*, q_b^*)}{\partial Q_a} - \sum \lambda_a \frac{\partial \phi_a(P_a, Q_a, p_b^*, q_b^*)}{\partial Q_a} \end{aligned} \tag{1.120}$$

となる。ところで，

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^*}{\partial q_b^*} &= \frac{\partial H}{\partial q_b^*} + \frac{\partial H}{\partial Q_a(p^*, q^*)} \frac{\partial Q_a(p^*, q^*)}{\partial q_b^*} \\ &= \frac{\partial H}{\partial q_b^*} - \sum \lambda_c \frac{\partial \phi_c}{\partial Q_a} \frac{\partial Q_a(p^*, q^*)}{\partial q_b^*} \\ &= \frac{\partial H}{\partial q_b^*} + \sum \lambda_a \frac{\partial \phi_a}{\partial q_b^*} \end{aligned} \tag{1.121}$$

である。ここで，式 (1.106) と式 (1.92) から導かれる関係式，

$$\frac{\partial H}{\partial Q_a} + \sum \lambda_b \frac{\partial \phi_b}{\partial Q_a} = 0 \tag{1.122}$$

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial q_b^*} + \sum \frac{\partial \phi_a}{\partial Q_c} \frac{\partial Q_c}{\partial q_b^*} = 0 \tag{1.123}$$

を使った。よって，運動方程式

$$\dot{p}_b^* = -\frac{\partial H^*(p^*, q^*)}{\partial q_b^*} \tag{1.124}$$

が得られる。同様に，

$$\dot{q}_b^* = \frac{\partial H^*(p^*, q^*)}{\partial p_b^*} \tag{1.125}$$

が得られる。正準変換では，変数は母関数より

$$(p_i \dot{q}_i - H)dt = (P_i \dot{Q}_i - H')dt + dF \tag{1.126}$$

$$p_i dq_i - P_i dQ_i = (H - H')dt + dF \tag{1.127}$$

と関係している。位相体積は，

$$\begin{aligned} \prod dp_l^* dq_l^* &= \prod dP_a dQ_a \delta(P_a)\delta(Q_a - Q_a(p^*, q^*)) \\ &= \prod dp dq \delta(\chi_a)\delta(\phi_b) \det\{\chi_a, \phi_b\} \end{aligned} \tag{1.128}$$

と表せる。拘束条件の代数が閉じていない場合もあるが，ここでは考察しないことにする。

1.2 簡単な系の量子力学

量子力学では，正準座標と共役運動量が交換関係，

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \tag{1.129}$$

を満たす複素ベクトル空間の演算子となる。A と B の交換関係は，

$$[A, B] = AB - BA \tag{1.130}$$

で定義される順序を変えた二つの演算子の積の差であり，λ や μ を複素数，A, B, C を演算子とすると

$$[A, B] = -[B, A] \tag{1.131}$$

$$[\lambda A + \mu B, C] = \lambda[A, C] + \mu[B, C] \tag{1.132}$$

$$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C] \tag{1.133}$$

となる反対称性，線形性，分配則を満たす。この点で，解析力学におけポアッソン括弧と同じ性質をもつ。実際 q_i と p_j との交換関係 $\frac{1}{i\hbar}[q_i, p_j]$ の値は，古典力学で計算した $\{q_i, p_j\}_{PB}$ で与えられ，他の変数の組合せも同じである。

通常の実数や複素数の演算では，積は順序によらないので交換関係は 0 となる。だから，交換関係は，演算子としての特徴を表す。式 (1.129) の右辺は純虚数であり，大きさは量子論に固有のプランク定数 h を 2π で割ったものである。座標と運動量との交換関係が新しい普遍定数に比例することが，量子力学の一つの特徴である。プランク定数は，

$$h = 6.6260693(11) \times 10^{-27}\ \mathrm{J{\cdot}s} \tag{1.134}$$

とミクロな大きさをもつ物理定数である。

量子力学では，状態ベクトルが物理状態を表し，二つの状態の内積が確率を決める。複素ベクトル空間では重ね合わせの原理が成り立つので，複数の状態 ψ_1 と ψ_2 から複素係数をかけて重ね合わせた状態

$$\lambda\psi_1 + \mu\psi_2 \tag{1.135}$$

が必ず存在し，また対応する物理状態が存在する。重ね合わせの原理が成り立つことは，波動現象の特徴である。だから，複素数の波が物理状態を表す。複素数は直接観測にかかるわけではなく，観測における測定値は実数である。ベクトル $\psi(x)$ にある状態と他のベクトル $\psi_a(x)$ にある状態との重なりを示す内積 $\langle\psi_a|\psi\rangle$ は，ベクトル $\psi(x)$ にある状態に対して他のベクトル $\psi_a(x)$ を観測する確率振幅であり，確率は $|\langle\psi_a|\psi\rangle|^2$ で与えられる。ψ_a が完全系をなし ψ が規格化された状態であるとき，全確率は

$$\sum_a |\langle\psi_a|\psi\rangle|^2 = 1 \tag{1.136}$$

と 1 になる。また値 a が観測されたときは異なる値 $a'(\neq a)$ は観測されない。このように，量子力学では確率が観測される。測定値は複素ベクトル空間における期待値として計算される。例として二つの穴をもつ壁を通る波による干渉の様子を図 1.4 に示した。

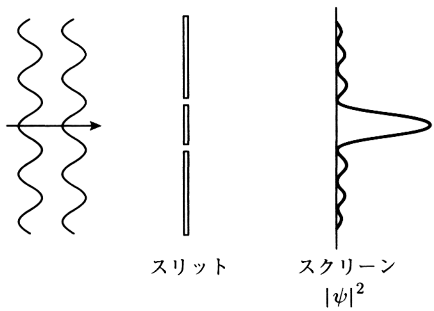


図 1.4 物質波の干渉

物理状態を表す複素数の波は，決まった時間発展をする。ハミルトニアン H より決まるシュレーディンガー方程式，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = H\psi(x) \tag{1.137}$$

が時間発展を決める。ハミルトニアン H は，解析力学と同じ形をしているが，量子力学では演算子となる。

物理量は原理的に観測されうるものである。そのため，物理量は固有値や期待値が必ず実数となるエルミート演算子で表せる。代表的な物理量は，位置座標 $\widetilde{x}_i$，運動量 $\widetilde{p}_i$，角運動量 $\widetilde{L}_i$，ハミルトニアン $\widetilde{H}$ などである。これらの固有値を決める固有値方程式は，

$$\widetilde{x}_i|x_i\rangle = x_i|x_i\rangle \tag{1.138}$$

$$\widetilde{p}_i|p_i\rangle = p_i|p_i\rangle \tag{1.139}$$

$$\widetilde{H}|E\rangle = E|E\rangle \tag{1.140}$$

である。座標と運動量の固有値 x_i, p_i, E は実数であり，これらの物理量の測定値である。座標と運動量の固有値は連続的な値をとり，固有状態は無限次元空間をなし，座標空間か運動量空間で無限に広がる規格化できない関数である。そのため，固有状態の内積はディラックのデルタ関数を使い

$$\langle \boldsymbol{x}(1)|\boldsymbol{x}(2)\rangle = \delta(\boldsymbol{x}(1) - \boldsymbol{x}(2)) \tag{1.141}$$

$$\langle \boldsymbol{p}(1)|\boldsymbol{p}(2)\rangle = \delta(\boldsymbol{p}(1) - \boldsymbol{p}(2)) \tag{1.142}$$

と表せる。

角運動量の固有値や固有状態は単純ではない。またハミルトニアンは対象とする物理系により異なる。簡単な例における固有状態を次章で求める。

1.2.1 調和振動子

ラグランジアンが，

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{d}{dt}x\right)^2 - \frac{k}{2}x^2 \tag{1.143}$$

と与えられる一次元調和振動子の量子力学を考える。運動量は

$$p = \frac{\delta}{\delta \frac{d}{dt}x}L = m\frac{d}{dt}x \tag{1.144}$$

となるので，ハミルトニアンは

$$H = p\frac{d}{dt}x - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \tag{1.145}$$

となり，座標と運動量との正準交換関係は

$$[x, p] = i\hbar \tag{1.146}$$

と与えられる。これより，生成演算子 a と消滅演算子 $a^\dagger$ を

$$a = \frac{1}{(2\hbar)^{1/2}}\left[(mk)^{1/4}x + i\frac{1}{(mk)^{1/4}}p\right] \tag{1.147}$$

$$a^\dagger = \frac{1}{(2\hbar)^{1/2}}\left[(mk)^{1/4}x - i\frac{1}{(mk)^{1/4}}p\right] \tag{1.148}$$

と定義すると，これらは交換関係，

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{1.149}$$

を満たす。これら生成演算子 a と消滅演算子 $a^\dagger$ を使い，ハミルトニアンが

$$H = \hbar\omega \left[a^\dagger a + \frac{1}{2} \right] \tag{1.150}$$

と表せる。この表示と交換関係を使うと，ハミルトニアンの固有状態である基底状態 $|0\rangle$，第一励起状態 $|1\rangle$，第二励起状態 $|2\rangle$ 等が

$$\begin{aligned} a|0\rangle &= 0 \\ |1\rangle &= a^\dagger|0\rangle \\ |2\rangle &= (\sqrt{2!})^{-1}(a^\dagger)^2|0\rangle \\ |n\rangle &= (\sqrt{n!})^{-1}(a^\dagger)^n|0\rangle \end{aligned} \tag{1.151}$$

と求まる。実際交換関係より，

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \hbar\omega\tfrac{1}{2}|0\rangle \\ H|1\rangle &= \hbar\omega(1+\tfrac{1}{2})|1\rangle \\ H|2\rangle &= \hbar\omega(2+\tfrac{1}{2})|2\rangle \\ H|n\rangle &= \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2})|n\rangle \end{aligned} \tag{1.152}$$

を満たすことがわかる。当然ながらこれらの固有状態は完全直交系をなし

$$\begin{aligned} \langle n|m\rangle &= \delta_{nm} \\ \sum_n |n\rangle\langle n| &= 1 \end{aligned} \tag{1.153}$$

を満たす。基底状態のエネルギーが 0 にならず正定値の有限の最低値をもつことがわかる。古典的なエネルギーが $p=0$ かつ $q=0$ で 0 になるのと大きく異なる性質である。量子力学では交換関係より $p=0$ かつ $q=0$ とはなれない。このため，最低固有値が正定値

$$\frac{1}{2}\hbar\omega$$

となる。ただしこの値は非常に小さいので，ミクロな世界以外ではあまり重要ではないことが多い。

1.2.2 一次元フェルミオン

一次元フェルミオン場 $b, b^\dagger$ は，反交換関係

$$\begin{aligned} bb^\dagger + b^\dagger b &= 1 \\ b^2 = (b^\dagger)^2 &= 0 \end{aligned} \tag{1.154}$$

に従う演算子である。これらの演算子の2乗は0になるので，演算子は二次元複素ベクトル空間を構成する。この空間は，基底状態 $|0\rangle$

$$|0\rangle \tag{1.155}$$

$$b|0\rangle = 0 \tag{1.156}$$

と一粒子状態 $|1\rangle$

$$|1\rangle = b^\dagger|0\rangle \tag{1.157}$$

$$b^\dagger|1\rangle = 0 \tag{1.158}$$

との2ベクトルで構成される。各状態に1粒子まで埋まることが可能であるため，パウリの排他律が満たされている。

1.3 経路積分量子化法

複雑な力学系の量子化には，経路積分による量子化が有効である。ここでは，量子化がよくわかっている自由度が少ない単純な力学系で経路積分表示を求める。得られた表式を後で拡張して高等な場の理論で使う。経路積分はゲージ理論の量子化で特に力を発揮する方法である。経路積分表示のいろいろな導出法があるが，ここではボソンとフェルミオンで共通な議論が可能であるコヒーレント状態を使う経路積分表示法を述べる。

1.3.1 ボソンコヒーレント状態

調和振動子の消滅演算子の固有状態，

$$\begin{aligned} a|z\rangle &= z|z\rangle \\ |z\rangle &= \exp{(za^\dagger - \bar{z}a)}|0\rangle \end{aligned} \tag{1.159}$$

を考えよう。これらの状態は，$z=0$ の場合を除き，ハミルトニアンの固有状態ではない。零固有値状態は例外的にハミルトニアンの固有状態になっている。これら消滅演算子の固有状態は，興味深い性質をもつとともに大事な働きをする。まず消滅演算子は，エルミートではないので固有値 z は実数ではなく複素数になり，また相異なる固有値に対応する固有状態は直交しない。そのかわり，以下の関係式，

$$\langle z|w\rangle = \exp\left(-\frac{\bar{z}z}{2} - \frac{\overline{w}w}{2} + w\bar{z}\right) \tag{1.160}$$

を満たす。明らかに異なる固有値に対応する状態は互いに直交していない。このため，この関数基底は非直交系である。しかしながら，以下に示すようにす

べての複素固有値に対応する状態は完全系をなす。

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{d\,\mathrm{Re}(z)d\,\mathrm{Im}(z)}{\pi}|z\rangle\langle z| \qquad (1.161)\\
&=\int \frac{d\,\mathrm{Re}(z)d\,\mathrm{Im}(z)}{\pi}\sum (n!m!)^{-1/2}|n\rangle\langle m|(\overline{z})^n z^m \exp(-\overline{z}z)\\
&=\int dr^2\frac{d\theta}{2\pi}\sum (n!m!)^{-1/2}|n\rangle\langle m|r^{(n+m)}\exp(i(n-m)\theta)\exp(-r^2)\\
&=\int dr^2\sum (n!m!)^{-1/2}|n\rangle\langle m|r^{(n+m)}\exp(-r^2)\delta_{nm}\\
&=1
\end{aligned}
$$

上の式で複素数の極座標表示 $z=re^{i\theta}$ を使った。さらにこの状態に消滅演算子を何回かけても古典的振る舞い，すなわち複素数固有値の単純なべき乗になるだけである。また，分散

$$(\delta x)^2=\langle z|x^2|z\rangle-\langle z|x|z\rangle^2 \tag{1.162}$$

$$(\delta p)^2=\langle z|p^2|z\rangle-\langle z|p|z\rangle^2 \tag{1.163}$$

に対して成立する不確定性関係

$$(\delta x)(\delta p)\geq\frac{\hbar}{2} \tag{1.164}$$

で等号を満たす最小波束の状態となっている。この状態はコヒーレント状態とよばれる。

関係式

$$\langle z|a|z\rangle=\left\langle z\left|\frac{1}{(2\hbar)^{1/2}}\left[(mk)^{1/4}x+i\frac{1}{(mk)^{1/4}}p\right]\right|z\right\rangle \tag{1.165}$$

より，座標と運動量の期待値が

$$\langle z|x|z\rangle=\mathrm{Re}\,(z)\times\left(\frac{1}{(2\hbar)^{1/2}}(mk)^{1/4}\right)^{-1} \tag{1.166}$$

$$\langle z|p|z\rangle=\mathrm{Im}\,(z)\times\left(\frac{1}{(2\hbar)^{1/2}(mk)^{1/4}}\right)^{-1} \tag{1.167}$$

となることがわかる。

(1)　ハウスドルフの公式

上の計算でハウスドルフの公式

$$e^Ae^B=e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \tag{1.168}$$

$$[A,[A,B]]=0,\quad [B,[A,B]]=0 \tag{1.169}$$

を使った。この公式は演算子の指数関数の計算でよく使われる。条件式 (1.169) が満たされない場合は，もっと複雑な公式になる。

さて調和振動子の分配関数 Z をエネルギー固有値を使う方法と今のコヒーレント状態を使う方法との両方法で計算してみよう。後者の方法は分配関数の経路積分表示へと導く。

$$Z = \sum_n \langle n|e^{-\beta E_n}|n\rangle$$
$$= \sum_n e^{-\beta E_n} = e^{-\beta \frac{\hbar\omega}{2}} \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} \qquad (1.170)$$

一方，コヒーレント状態を使う表示では，完全系をなすコヒーレント状態を中間に入れて，

$$Z = \mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H}) = \int \frac{dz}{\pi} \langle |e^{-\beta H}|z\rangle$$
$$= \int \prod_l \frac{dz_l}{\pi} \langle z_l|\exp(-\delta\beta H)|z_{l+1}\rangle \qquad (1.171)$$

と表す。ただし，

$$\beta = \sum_l \delta\beta$$
$$z_1 = z, \quad z_{l+1} = z \qquad (1.172)$$

なる境界条件を満たすようにし，さらに分割数を十分大きくとり $\delta\beta$ が限りなく小さくなるようにする。このとき，指数関数を展開して，中間状態や初期状態，終状態に代入したコヒーレント状態の性質から，消滅演算子と生成演算子はいずれも前後の状態の固有値で置き換わる。同時に，固有値に関する和は積分に置き換わる。その結果，分配関数は，積分で表される。

$$Z = \int \prod_l \frac{dz_l}{\pi} \langle z_l|(1-\delta\beta H)|z_{l+1}\rangle$$
$$= \int \prod_l \frac{dz_l}{\pi} \langle z_l|(1-\delta\beta\hbar\omega(\bar{z}_l z_{l+1}+1/2))|z_{l+1}\rangle$$
$$= \int \prod_l \frac{dz_l}{\pi} \langle z_l|\exp(-\delta\beta\hbar\omega(\bar{z}_l z_{l+1}+1/2))|z_{l+1}\rangle \qquad (1.173)$$

さらに行列要素 (1.160) を代入して，

$$Z = \int \prod_l \frac{dz_l}{\pi} \exp\left(-\delta\beta\hbar\omega(\bar{z}_l z_{l+1}+1/2) - \frac{\bar{z}_l z_l}{2} - \frac{\bar{z}_{l+1} z_{l+1}}{2} + \bar{z}_{l+1} z_l\right) \qquad (1.174)$$

となる。積分を実行すると結局，

$$Z = e^{-\beta \frac{\hbar\omega}{2}} \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} \qquad (1.175)$$

となり，式 (1.171) と一致する。

さらにここで，間隔を小さくする極限を考える。$\hbar = 1$ として，複素数の実部と虚部を

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}[(mk)^{1/4}x + i(mk)^{-1/4}p] \tag{1.176}$$

と分離して，x と p に関する積分形で (1.174) は

$$Z = \int \prod \frac{dx\,dp}{2\pi} \exp\left(-\int d\tau \left(ip\frac{\partial}{\partial\tau}x + \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2\right)\right) \tag{1.177}$$

となり，経路に関する積分の形になる。この最終の積分形には，複素数での単なる積分だけが現れ，演算子やヒルベルト空間はもはや現れない。しかも経路に関する重みは，時間を虚数とみなしたラグランジアンを積分した作用の指数関数の形をしている。ここまでは，調和振動子を調べてきた。より複雑な理論でも，生成消滅演算子を構成することができ，だから完全系をなすコヒーレント状態をつくることができる。その結果，調和振動子の場合と同じに，作用を積分の重みとする経路積分が得られる。このため，話の順序を今までと逆にして，経路積分の形から出発して量子化を行うことも可能である。

1.3.2　フェルミオンコヒーレント状態

コヒーレント状態を使う計算法はフェルミオン場に対しても適用できる。フェルミ場のコヒーレント状態を定義するには，しかしながら反可換な c 数，すなわち演算子ではないが反可換である数が必要である。反可換な c 数は，可換な性質をもつ実数や複素数のような単純な数ではない。さらに反可換な c 数についての微分や積分を定義し使う。これらはすべて機械的に “symbolic” に定義したものであると割りきって理解するのがよいだろう。二つの反可換な c 数 η_1, η_2 は

$$\begin{aligned} \eta_1\eta_2 &= -\eta_2\eta_1 \\ \eta_i^2 &= 0 \end{aligned} \tag{1.178}$$

を満たすものである。この変数の微分は通常と同じだが，定積分は

$$\int d\eta = 0 \tag{1.179}$$

$$\int d\eta\,\eta = 1 \tag{1.180}$$

と定義される。これより反可換な c 数 η の関数は

$$f(\eta) = f_0 + \eta f_1 \tag{1.181}$$

と展開され，この関数の積分は

$$\int d\eta f(\eta) = f_1 \tag{1.182}$$

と定義される。この反可換な c 数を係数とするフェルミオン場 $b, b^\dagger$,

$$\begin{aligned} bb^\dagger + b^\dagger b &= 1 \\ b^2 = (b^\dagger)^2 &= 0 \end{aligned} \tag{1.183}$$

を使い定義される状態

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= |0\rangle + \eta|1\rangle \\ b|0\rangle &= 0, \quad |1\rangle = b^\dagger|0\rangle \end{aligned} \tag{1.184}$$

は

$$b|\eta\rangle = \eta|\eta\rangle \tag{1.185}$$

となり消滅演算子 b の固有状態となっている。さらに，η に複素共役な反可換 c 数 $\overline{\eta}$ を使い，

$$\overline{\eta}_1\overline{\eta}_2 = -\overline{\eta}_2\overline{\eta}_1 \tag{1.186}$$

$$\overline{\eta}_i{}^2 = 0 \tag{1.187}$$

$$\eta_1\overline{\eta}_2 = -\overline{\eta}_2\eta_1 \tag{1.188}$$

を導入しておく。積分は

$$\int d\overline{\eta} = 0 \tag{1.189}$$

$$\int d\overline{\eta}\,\overline{\eta} = 1 \tag{1.190}$$

であり，これらで完全性の条件，

$$\begin{aligned} &\int d\overline{\eta} d\eta \exp(-\overline{\eta}\eta)|\eta\rangle\langle\eta| \\ &= \int d\overline{\eta} d\eta (1 - \overline{\eta}\eta)(|0\rangle + \eta|1\rangle)(\langle 0| + \overline{\eta}\langle 1|) \\ &= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = 1 \end{aligned} \tag{1.191}$$

を満たす。上の式で積分要素に指数関数 $e^{\overline{\eta}\eta}$ が入ることに注意が必要である。また任意の演算子のトレースについては，c 数が反可換であるため以下のような修正が必要である。O を一つの演算子として，

$$\begin{aligned} &\int d\overline{\eta} d\eta \exp(-\overline{\eta}\eta)\langle\eta|O| - \eta\rangle \\ &= \int d\overline{\eta} d\eta (1 - \overline{\eta}\eta)(\langle 0| + \overline{\eta}\langle 1|)O(|0\rangle - \eta|1\rangle) \\ &= \langle 0|O|0\rangle + |\langle 1|O|1\rangle \end{aligned}$$

$$= \mathrm{Tr}(O) \tag{1.192}$$

であり，完全系を張るときの表示と，Tr との表示の相違点に注意が必要である。これがフェルミオン場の経路積分で，反可換な c 数が反周期境界条件を満たす理由である。また状態の重なりは，積分

$$\langle \eta' | \eta \rangle = \exp(\overline{\eta}' \eta) \tag{1.193}$$

とボソンの場合とよく似た表式で与えられる。ただしボソンの場合には，ベクトル空間は正定値のノルムをもち，

$$\langle z | z \rangle = 1 > 0 \tag{1.194}$$

であるのに対して

$$\langle \eta | \eta \rangle = \exp(\overline{\eta}\eta) = 1 + \overline{\eta}\eta \tag{1.195}$$

は正定値ではないことに注意を払う必要がある。

さて，分配関数

$$Z = \mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H}) \tag{1.196}$$

を経路積分を使い計算してみよう。1 自由度のフェルミオン演算子 $b, b^\dagger$ で，

$$H = \epsilon b^\dagger b \tag{1.197}$$

となるとき，フェルミオンコヒーレント状態を使い，経路積分

$$Z = \int d\overline{\eta} d\eta \exp(-\overline{\eta}\eta) \langle -\eta | \exp(-\beta\epsilon b^\dagger b) | \eta \rangle \tag{1.198}$$

を求める。中間状態に，完全系をなすフェルミオンコヒーレント状態を代入して，

$$Z = \int_{\eta_0 = -\eta_n} \prod_i d\overline{\eta}_i d\eta_i \exp(-\overline{\eta}_i \eta_i) \langle \eta_i | \exp(-\delta\beta\epsilon b^\dagger b) | \eta_{i+1} \rangle \tag{1.199}$$

となり，さらにコヒーレント状態の性質から

$$Z = \int_{\eta_0 = -\eta_n} \prod_i d\overline{\eta}_i d\eta_i \exp(-\overline{\eta}_i \eta_i) \langle \eta_i | \exp(-\delta\beta\epsilon \eta_i \eta_{i+1}) | \eta_{i+1} \rangle \tag{1.200}$$

となる。これを計算して，

$$1 + \exp(-\beta\epsilon) \tag{1.201}$$

が得られる。これは，経路積分を使わない計算結果，

$$\begin{aligned} Z &= \langle 0 | \exp(-\beta\epsilon b^\dagger b) | 0 \rangle + \langle 1 | \exp(-\beta\epsilon b^\dagger b) | 1 \rangle \\ &= 1 + \exp(-\beta\epsilon) \end{aligned} \tag{1.202}$$

に一致する。

さらに，間隔を小さくする極限で，式 (1.200) は

$$Z = \int \prod d\overline{\eta} d\eta \exp\left(- \int d\tau \left(i\overline{\eta} \frac{\partial}{\partial \tau} \eta + \epsilon \overline{\eta} \eta \right) \right) \tag{1.203}$$

と表せる。フェルミ場の計算は，1次元では経路積分を使うことで簡単になるわけではない。むしろ複雑になっている。しかし，高次元のフェルミ場の問題では威力を発揮する。

問題 1

1.1 積分 (1.174) が式 (1.170) と一致することを確かめよ。

1.2 積分 (1.200) が式 (1.201) に一致することを確かめよ。

1.3 $[A,[A,B]] \neq 0$, $[B,[A,B]] \neq 0$ である一般の場合のハウスドルフ公式を導け。

2章　古典電磁気学

電荷をもつ物質の間には，物質の種類や性質によらない普遍的なクーロン力が働いている。クーロン力は，電荷の大きさに比例し電荷間の距離の2乗に反比例する大きさをもち，それらを結ぶ直線上の方向を向いている。電子，陽子や金属のイオン等の 10^{-8} cm 以下のミクロの物質から，帯電した油滴，水滴，金属球等マクロの物体まで，全く異なる階層で異なる物質が同じ大きさの力で互いに引き合ったり，反発し合っている。これは，不思議であるとともに驚くべきことであろう。

物質間に働く電磁気力は，電磁場から生成されていると考えることで，普遍的な性質が理解できる。同じ電荷で異なる物質は，同じ電磁場をつくり同じ力を与える。

電磁気的な力に関する現象は一見複雑でありながらその法則が単純で美しい。このように単純でありながら，一方で普遍性をもつ物理法則は広い範囲の自然現象と関連するため，多くの応用をもつ。電磁気学は古典物理学の中で力学と並んで基本的な柱の一つである。

2.1　電荷間の力と電場，ならびに電流間の力と磁場(磁束密度)

力が働いている物体は，等速度運動からずれた運動をする。力が作用している質量 M の質点の位置ベクトルは，加速度が質量に反比例し力に比例するニュートンの運動方程式に従う。物体の運動は，当然力によって変わる。

では自然界にはどんな力が存在するのであろうか?　これは自然界にある物

理現象を調べること，つまり物理現象の観察や実験で明らかにされる。多岐にわたる自然現象の観察や観測，様々な実験により，

1. 電荷が存在すること，
2. 電荷間には必ず決まった力が働き，また電流間にも必ず決まった力が働くこと，
3. この力は普遍的な性質をもつこと，

がわかった。つまり，電気的な力が存在し，物質の構造，性質，自然の様々な事柄の原因となっていることがわかった。

初め二つの電荷間に働く力についてのクーロンの法則について考えよう。二つの物体AとBが電荷 Q_a と Q_b をもち，空間のある点 $\mathrm{P}(\boldsymbol{r}_a)$ と $\mathrm{Q}\ (\boldsymbol{r}_b)$ にあるとする。物体AとBがいかなるものであれ，二つの間に距離の2乗に反比例し，電荷の積に比例する大きさをもつクーロン力，

$$\boldsymbol{F} = \frac{Q_a Q_b}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b}{r_{ab}^3}, \quad r_{ab} = ((\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b)^2)^{1/2} \tag{2.1}$$

が働く。電荷と電荷間の力に関するクーロンの法則は，電磁気学の最も基本的な法則の一つである。比例定数 $4\pi\epsilon_0$ は電荷の単位や力の単位のとり方で変わるものであり，本書では $4\pi\epsilon_0$ のままで使う。便利な換算は真空中の光の速さ c を使う

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = c^2 \times 10^{-7}\ \mathrm{N{\cdot}A^{-2}} \tag{2.2}$$

である。力が二つの物体間の距離の2乗に反比例することは，距離が一定である球面の面積が距離の2乗に比例することとあわせると，後で述べる電気力線の総数が一定であることを意味し，保存則と関係することを示唆する。

クーロン力は以下にあげるような特徴的な性質をもつ。

1. 力が物体の詳細な性質に無関係で，電荷だけで決定されている。
2. 長距離でも短距離でも働く力であり，力の到達距離は無限である。
3. 上記の事柄を反映して，クーロン力はミクロな物体間でもマクロな物体間にも共通に働く。
4. 力の大きさのオーダーは電子と陽子が1 cm離れたとき 2.3×10^{-24} Nである。

二つの荷電物体の運動から，荷電物体間に力 (2.1) が働いていることが確認される。

次に，Aをそのままにし Bを電荷 Q_b' の別の物体にかえてみよう。今度は両

物体間に Q_b を Q_b' にかえた力が働く。このため，(2.1) 式を二つに分解し，電場を導入して表してみると見通しよいことがわかる。すなわち，

$$\boldsymbol{E}_b = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b}{r_{ab}^3} \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{F} = Q_b \boldsymbol{E}_b \tag{2.4}$$

と表し，A によって決定された電場 $\boldsymbol{E}_b$ の下におかれた電荷 Q_b に 力が働いていると考える。この考えでは，遠く離れた二つの物体が直接作用し合う「遠隔作用論」ではなく，中間の場を通して作用し合う「近接作用論」がとられる。電荷がまずまわりの空間に電場をつくり次に電場が他の電荷に作用を及ぼすわけである。電場がいかなる原因でつくられているかに無関係に，ある場所での荷電粒子への物理的効果がその場所における電場だけで決定され，$Q_b\boldsymbol{E}_b$ の力が物体に働く。一つの荷電粒子が 多くの荷電物体から力を受け運動しているときもやはり，この荷電粒子の場所における電場で力が決まる。この粒子の運動を決めるのは，これら荷電物体のすべてについての個々の詳細な情報ではなく，その場所における電場だけである。電場により荷電粒子の運動が完全に決められる。このように電場を使うと複雑な系でも簡単に運動が求まる。電場には重ね合わせの原理が成立するので，これら多くの荷電物体によりつくられる電場は，

$$\boldsymbol{E}_b = \sum_a \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b}{r_{ab}^3} \tag{2.5}$$

と表せる。これより，ベクトル場は，電荷密度 $\rho(\boldsymbol{x})$，

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_a Q_a \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_a) \tag{2.6}$$

を発散の源とする微分方程式，

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{x}) \tag{2.7}$$

に従うことになる。

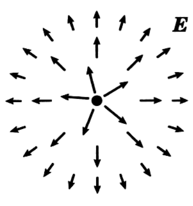


図 2.1 電荷がつくる電場

（**例**）　原点に点電荷があるときの電場は球座標で，

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{2.8}$$

と表せる。これは原点以外で

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = 0 \tag{2.9}$$

を満たすが，原点を中心とする半径 R の球面上での電場の面積分，すなわち原点から外に出る電気力線の総和

$$\oint d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E} = \int r^2\,dr\,d\cos\theta\,d\phi\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{2.10}$$

は原点における電荷となる。

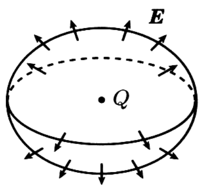


図 2.2　電束と電荷

次に定常電流の間の力について考える。点 P と Q にある定常電流 $\boldsymbol{j}_a$ と $\boldsymbol{j}_b$ の間には，力

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{j}_a\times\boldsymbol{j}_b\times(\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b)}{r_{ab}^3} \tag{2.11}$$

が働くことがアンペールによって明らかにされた。μ_0 は A (アンペア) から

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\ \mathrm{N\cdot A^{-2}} \tag{2.12}$$

と決まる定数である。電流間の力に関するアンペールの法則は，電荷間のクーロンの法則とならび重要なものである。電流間の力は式 (2.1) の クーロン力とは明らかに異なっているが，また次にあげるようによく似た性質ももっている。電流間の力の特徴は次のようなものである。

1. 力は電流だけで決まり，電流を運ぶ物体にはよらない。
2. 力の到達距離が無限大である。
3. ミクロな物体でもマクロな物体でも共通に働く。
4. 1 A の平行直線電流が 1 m 離れておかれたとき，1 m あたり働く力の大きさは 10^{-7} N である。

以上の性質はクーロン力の性質とよく似ている。そのため電流間の力を新しい場，磁場または磁束密度を使い，

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{j}_a \times \boldsymbol{B}_b \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{B}_b = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{j}_b \times (\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b)}{r_{ab}^3} \tag{2.14}$$

と表す。多くの電流が分布しているとき，場は重ね合わせの原理より

$$\boldsymbol{B}_b = \sum \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{j}_b \times (\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b)}{r_{ab}^3} \tag{2.15}$$

と表せる。これはベクトル場 $\boldsymbol{B}$ が電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$,

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = \sum \boldsymbol{j}_b \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_b) \tag{2.16}$$

を回転の源とする微分方程式，

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \tag{2.17}$$

に従っていることを意味する。すなわち，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は電流を回転の源とするようにつくられている。

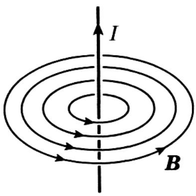


図 2.3 電流と磁束密度

(**例**) z 軸上を大きさ I の電流が流れているときの磁束密度は円柱座標での単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\varphi$ を使い，

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \boldsymbol{e}_\varphi \tag{2.18}$$

と表せる。これは z 軸上以外では

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.19}$$

を満たすが，z 軸を囲む半径 R の円に沿う線積分，

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \mu_0 I \tag{2.20}$$

は電流に比例する (図 2.4)。

電場の発散が電荷密度で決まり，磁束密度の回転が電流で決まることを見てきた。では電場の回転や磁束密度の発散は何で与えられるだろうか？ これら

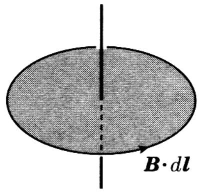


図 2.4 磁束の線積分

が決まれば，電場や磁束密度が一意的に決まることになる。電場の回転は次に述べるファラデーの法則で決まる。もしも，電荷と同様な磁荷が存在すれば，磁荷密度が磁束密度の発散を与えるはずである。しかし，磁荷をもつ物質は今まで見つかっていない。磁場をつくる源として磁石が知られているが，必ずN極とS極が対になっている。片方だけの極をもつ磁気単極子は今まで見つかっていないので，自然界には存在しないと思われる。本書では磁気単極子は自然界に存在しないとみなす。よって，ベクトル場 $\boldsymbol{B}$ は発散をもたないため，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.21}$$

を満たす。

式 (2.7), (2.17) と式 (2.21) が，定常的な場合の電場と磁束密場とを決定する基本的方程式である。二つの場は電荷や電流に力を与える働きをすることを見てきた。このため今までのところ，場は単なる数学的な道具として導入されただけのようにみることも可能である。しかし場がじつは時間とともに決まった変化をする力学量であることが徐々に明確になってくる。

2.2 電場および磁場の運動方程式

今まで調べてきた定常的な電磁気現象では，電場と磁場は全く独立な場であった。電場や磁場が時間的に変化するときは，互いが独立ではなく相互変換し合う。これらの考察から，磁場や電場が従う運動方程式が明らかになる。

まず，導体からなる回路を切る磁束が時間的に変動するとき，回路に起電力が生ずる電磁誘導現象をみる。ファラデーは，「閉じた回路の内部を横切る磁束が時間的に変化するとき，回路に生ずる起電力は磁束の変化を妨げる方向に生じ，大きさは磁束の変化率に比例する」という電磁誘導の法則を見つけた。起電力を V とし，回路を横切る磁束を $\Phi(t)$ とすると，

$$V = -\frac{d}{dt}\Phi(t) \tag{2.22}$$

が成立する。この電磁誘導の法則には，回路の形や抵抗の値は現れず，これらにはよらない。磁束の時間変化に比例する起電力が回路の性質や大きさによらずに発現することは，回路の存在に無関係に空間に電場が現れることであろう。回路がない所では直接的な測定はできない。しかしながら磁束の時間的変化があるとき，電場や磁場が物理的実体をもつのであれば，回路のあるなしによらずに空間に電場が生ずると考えるのが自然であろう。磁束は磁束密度を面積分して得られ，起電力は電場を線積分して得られる。このため，電磁誘導の法則は微分形では，

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\frac{d}{dt}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \tag{2.23}$$

と表される。微分形の両辺を面積分し，ベクトル場の回転に関するストークスの積分定理を使うことにより，両式が同等であることがわかる。式 (2.23) は磁束密度の時間変化が電場の回転で与えられるという，時間について 1 次の運動方程式である。

次に電場が時間的に変化するとき成り立つ運動方程式を理論的な思考実験に基づいて考えよう。電荷密度から電場を決める式 (2.7) より，電場が時間変化をするときは電荷密度も時間変化する。ところで，電荷密度は電流密度とともに連続の式，

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{x}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{2.24}$$

を満たす。連続の式は電荷が消えることなく動くだけであり，密度の変化は電荷が流れることで補償されることを示している。電荷の保存則を示す連続の式は，いかなる物理系でも成り立つ関係式である。流れの式と電場の決定式を電荷密度に代入することにより，電荷密度が時間変化するときは電流密度は保存せず，かわりに

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) + \epsilon\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)\right) = 0 \tag{2.25}$$

を満たすことがわかる。電流密度は磁場に対する決定方程式 (2.17) の右辺にあり，磁場の回転に比例する。右辺の発散が 0 にならないと，発散が必ず 0 となる左辺とは一致しない。つまり，場が時間的に変化するときには，二つの等式が互いに矛盾することになる。そのため，何らかの修正が必要である。マックスウェルはこれを気づき，式 (2.17) の右辺を

$$\mu_0\left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})+\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)\right) \tag{2.26}$$

と修正した。すると磁場に対する決定方程式は,

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})+\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)\right) \tag{2.27}$$

と書くことができ，両辺とも発散が0である矛盾のない式となっている。電場の時間微分の項は電流密度としての役割を果たすように振る舞うのでマックスウェルの変位電流とよばれる。

(例) 変位電流の例は電極にたまっている電荷が時間とともに変化するコンデンサーで見られる。極板での電荷密度を $\rho(t)$ とする。このとき極板間の電場の大きさは,

$$E(t)=\frac{1}{\epsilon_0}\rho(t) \tag{2.28}$$

で与えられ時間とともに変動する。一方，極板の面積を S とすると，コンデンサーに流れこむ全電流は

$$I(t)=\frac{d}{dt}\rho(t)S=\frac{d}{dt}\epsilon_0E(t)S \tag{2.29}$$

である。よって極板間には電束密度の時間微分に比例する密度の電流が流れているとみなせる。

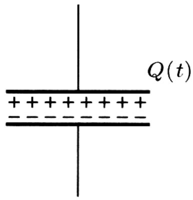


図 2.5 コンデンサー

式 (2.27) は電場の時間微分を与える運動方程式となっている。この運動方程式は，式 (2.23) と同様に時間について1次の方程式である。式 (2.23) と (2.27) が電場および磁場に対する時間発展を与える運動方程式である。場の決定方程式 (2.7), (2.17) および (2.21) と組になって，電磁気学の基礎方程式をなし，マックスウェル方程式とよばれる。以下にマックスウェル方程式をまとめておく。

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{x},t) \tag{2.30}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) \tag{2.31}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{2.32}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \mu_0 \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) \right). \tag{2.33}$$

式 (2.31) より電場の回転は磁束密度の時間的変化を引き起こし，式 (2.33) より磁束密度の回転は電場の時間的変化を引き起こすことがわかる。すなわち電場の空間的な変化が原因となって磁束密度の時間変化が生成され，逆に磁束密度の空間的な変化が原因となって電場の時間変化が生成されることがわかる。

2.3 電 磁 波

真空中では，マックスウェル方程式は，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{2.34}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) \tag{2.35}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{2.36}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) \tag{2.37}$$

となる。マックスウェル方程式は電場と磁束密度が結合した 1 階の連立方程式である。これより，電場や磁束密度に関する 2 階の波動方程式，

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) \\ &= -\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla^2 \boldsymbol{E} - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) = \nabla^2 \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{2.38}$$

が得られる。$\boldsymbol{B}$ についても同様であり，

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) \tag{2.39}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \nabla^2 \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) \tag{2.40}$$

となり，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ や $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$ は真空中で電場や磁束密度の空間変化を表す $\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ や $\nabla^2 \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$ を力とする形をしたニュートンの方程式を満たす。これより媒質が全くない真空中で波が伝播することがわかる。

2.3.1 平 面 波

この波動方程式の自明でない簡単な特殊解である平面波を求めてみよう。一方向に進む無限に広がっている平面波を，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = e^{i(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x})} \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k}) \tag{2.41}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})}\boldsymbol{\epsilon}'(\boldsymbol{k}) \tag{2.42}$$

と表す。ここで波の偏向を表すベクトル $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{\epsilon}'(\boldsymbol{k})$ は，関係式

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k}) = 0 \tag{2.43}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}'(\boldsymbol{k}) = 0 \tag{2.44}$$

$$\omega\boldsymbol{\epsilon}'(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k}) \tag{2.45}$$

$$\epsilon_0\mu_0\omega\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\epsilon}'(\boldsymbol{k}) \tag{2.46}$$

を満たすとき，方程式の解となっている。この波は式 (2.45) より電場や磁場の方向が進行方向と直交している横波であることがわかる。また式 (2.46) より電場と磁場が互いに直交していて

$$\epsilon_0\mu_0\omega^2 = k^2 \tag{2.47}$$

を満たす一定の速さをもつ波を表している。真空中を進む波はエネルギーや運動量をもち，発生源から隔てた場所における装置や物体に物理的効果を引き起こす。これは場が物理的な実体をもつことを示している。波の伝播の速さは，

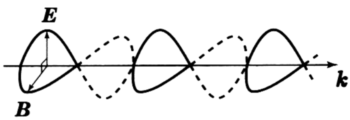


図 2.6　$\boldsymbol{k}$ 方向に進む波

真空の誘電率と透磁率の二つの定数より $1/(\epsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}$ と表せる普遍定数である。これは電磁波の速さであるが，光も電磁波であるため光速である。光は物体の速さとしては最大のものであり，有限な質量をもつ物質の速さはいつもこれより小さい。情報の伝達の速さも高々光速である。式 (2.34), (2.35), (2.36), (2.37) はもちろん，導波管内のような金属で囲まれた空間の波動や特殊な境界条件での波動など平面波以外の複雑な様々な解をもつ。ラジオやテレビでは，音声や画像などのすべての情報が放送局で電波にのせられアンテナから発信される。電波は真空中や空気中を伝播し，各家庭の受信機で受信の後増幅され音声や画像として再生される。

2.4　物質中の電磁波

電気についての性質の違いから，物質は絶縁体と金属に分けられる。絶縁体は定常電流を流さない物質であり，金属は流す物質である。内部構造の違いに

よって，このように異なる性質が現れる。前者は，自由に動き回る束縛されていない電子とかイオンとかの荷電粒子をもたない物質であり，後者はもつ物質である。後者では，荷電粒子が電場の影響ですぐに動いてしまい物質の内部状態が元とは異なる状態に変わる。そのため，電磁場の影響を単純な力学的な問題として論じようとしても，抵抗や減衰が現れ，事情がだいぶ複雑になる。ここでは，絶縁体だけを考察する。絶縁体では，電場や磁場の影響のために，物質が変化するとしても振り子のように元に戻ってしまう。そのため，抵抗や減衰はなく真空中とほとんど同じ扱いですむ。

絶縁体中でも物質の電気的な効果は存在する。このときの物質の効果では，電場に影響を与える電気二重極モーメントと磁場に影響を与える磁気二重極モーメントが特に重要である。これらは，物質内の各要素の非等方的な電荷分布や非等方的な閉電流分布により生じ，外部電場や外部磁場に比例した大きさをもつ。このため，電場 $\boldsymbol{E}$ と電束密度 $\boldsymbol{D}$ の関係や磁場 $\boldsymbol{H}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の関係式は

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{2.48}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{2.49}$$

と変わる。ここで比例係数 ϵ や μ は実数定数である。これらが，複素数になるとともに定数とは異なる場合もあるが，ここではこの状況は考察しない。すると，物質中では，真空中の ϵ や μ を物質中のものに変えたマックスウェル方程式が成立することになる。これは，

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\text{true}} \tag{2.50}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.51}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \tag{2.52}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_{\text{true}} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D} \tag{2.53}$$

である。一様な物質で電荷や電流がないとき，一つの場についての波動方程式は

$$\left[\epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\right]\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{2.54}$$

$$\left[\epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\right]\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{2.55}$$

となり，波の伝播の速さである物質中の光速 c_m は，

$$c_m = c\sqrt{\frac{\epsilon_0\mu_0}{\epsilon\mu}} \tag{2.56}$$

となる。右辺の比は1より小さな数である。このため，物質中では電磁波の伝播の速さは真空中より遅くなる。物質がある空間領域と真空が接しているときには，それぞれの領域で成立するマックスウェル方程式から境界での条件が導かれる。

2.5 ポテンシャルとゲージ変換

マックスウェル方程式は，電場と磁場に関する時間や空間座標について1次の偏微分方程式である。このままでは，電場と磁束密度が結合しているため解きにくいし，また2次の微分方程式であるニュートンの運動方程式とは定性的に異なる。しかし新たな力学変数を導入して，マックスウェル方程式を時間について2次の方程式で解きやすいものに書き直すことが可能である。この表示でマックスウェル方程式はニュートンの運動方程式と同等な形になり，後で述べるように正準形式で表現できることになる。正準形式での形は，後で議論する量子化を行うのに適している。

力学変数として，スカラーポテンシャル，$A_0(\boldsymbol{x},t)$ とベクトルポテンシャル $A_i(\boldsymbol{x},t)$ $(i=1\sim 3)$ を導入して，電場および磁束密度のかわりに使う。ポテンシャルから電場や磁場が，

$$E_i(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial}{\partial t}A_i(\boldsymbol{x},t)-\frac{\partial}{\partial x_i}A_0(\boldsymbol{x},t) \tag{2.57}$$

$$B_i(\boldsymbol{x},t)=\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}A_k(\boldsymbol{x},t) \tag{2.58}$$

で求まる。このとき，磁束密度の発散，

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k=0 \tag{2.59}$$

は恒等的に0となっている。式(2.21)より磁束密度の発散が0になるので，上記のように磁束密度をベクトルポテンシャルの回転とおける。

電場や磁束密度が，式(2.4)や式(2.14)でわかるように電荷や電流に作用する力と直接結びつく観測可能な量であるのに反して，ポテンシャルは直接観測される物理量ではない。またポテンシャルは電場や磁束密度から式(2.58)で一意的に決定されるわけではなく，不定性をもつ。ポテンシャルを任意関数 $\lambda(x_\mu)$ で，

$$A_\mu(\boldsymbol{x},t)\to A_\mu(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\lambda(x_\mu) \tag{2.60}$$

と変換しても明らかに電場や磁束密度は不変である。この変換をゲージ変換と

よびゲージ変換に対する不変な物理量をゲージ不変量，不変な理論をゲージ不変な理論とよぶ。ポテンシャルを使い電磁気学の運動法則を表すとき，理論はゲージ不変性をもつことになる。

さて真空中のマックスウェル方程式 (2.34), (2.35), (2.36), (2.37) をポテンシャルを使い表そう。マックスウェル方程式は,

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu(\boldsymbol{x},t) - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{2.61}$$

という単純な波動方程式にまとめられる。ゲージ変換の自由度を使い，さらにポテンシャルが

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{2.62}$$

を満たすようにできる。このとき，方程式はさらに,

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{2.63}$$

と簡単な形になる。

2.5.1 球 面 波

ベクトルポテンシャルの従う方程式 (2.63) を使い球面波を求めよう。$A_z(\boldsymbol{x},t)$ が球座標 $(r,\theta.\varphi)$ の関数であるとして,

$$A_z(\boldsymbol{x},t) = e^{-i\omega t} f(r,\theta,\varphi) \tag{2.64}$$

とする。

方程式は,

$$\left(\partial_i{}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) f(r,\theta,\varphi) = 0 \tag{2.65}$$

となり，解は

$$f(r,\theta,\varphi) = \frac{e^{ikr}}{r} R(r) Y_{l,m}(\theta,\varphi) \tag{2.66}$$

で与えられる。ここで $R(r)$ は r についての方程式,

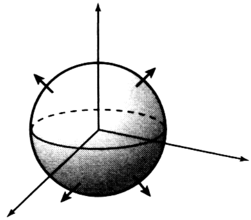


図 2.7 球面波

$$\frac{d^2}{dr^2}R(r)+2ik\frac{d}{dr}R(r)+\frac{l(l+1)}{r^2}R(r)=0 \tag{2.67}$$

に従う。よって，原点から遠く離れた点で $R(r)$ は，

$$R(r)=1,e^{-2ikr} \tag{2.68}$$

と振る舞い，$A_z(\boldsymbol{x},t)$ は，

$$\begin{aligned}A_z(\boldsymbol{x},t)&=\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}Y_{l,m}(\theta,\varphi)\\&=\frac{e^{-i(kr+\omega t)}}{r}Y_{l,m}(\theta,\varphi)\end{aligned} \tag{2.69}$$

と表せる。前者の解は原点から外に広がる球面波であり，後者の解は逆に外から原点に入る球面波を表している。

2.5.2 電磁波の放射

電荷密度を $j_0(\boldsymbol{x},t)$，電流密度を $j_i(\boldsymbol{x},t)$ と四元ベクトルで表そう。電荷密度や電流密度があるとき，ベクトルポテンシャルは

$$\partial_\mu\partial^\mu A_\nu(\boldsymbol{x},t)-\partial_\nu\partial^\mu A_\mu(\boldsymbol{x},t)=j_\nu(\boldsymbol{x},t) \tag{2.70}$$

に従う。さらにベクトルポテンシャルが条件 $\partial_\mu A^\mu=0$ を満たす場合には，方程式は，

$$\partial_\mu\partial^\mu A_\nu(\boldsymbol{x},t)=j_\nu(\boldsymbol{x},t) \tag{2.71}$$

となる。式 (2.71) を解いてベクトルポテンシャルを求めてみよう。時間でフーリエ変換して得られる，

$$A_\mu(\boldsymbol{x},\omega)=\frac{1}{2\pi}\int dte^{i\omega t}A_\mu(\boldsymbol{x},t) \tag{2.72}$$

$$j_\mu(\boldsymbol{x},\omega)=\frac{1}{2\pi}\int dte^{i\omega t}j_\mu(\boldsymbol{x},t) \tag{2.73}$$

を式 (2.71) に代入して，解，

$$A_0(\boldsymbol{x},\omega)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dv'\rho(\boldsymbol{x}',\omega)\frac{e^{ikr}}{r} \tag{2.74}$$

$$A_i(\boldsymbol{x},\omega)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dv'j_i(\boldsymbol{x}',\omega)\frac{e^{ikr}}{r} \tag{2.75}$$

を得る。ただし $r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ とする。式 (2.75) をフーリエ逆変換して，ベクトルポテンシャルが

$$A_0(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dv'\rho(\boldsymbol{x}',t')\frac{1}{r} \tag{2.76}$$

$$A_i(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dv'j_i(\boldsymbol{x}',t')\frac{1}{r} \tag{2.77}$$

と得られる。上式で遅延解では t' には遅延時間 $t' = t - \frac{kr}{\omega}$ が代入される。

点電荷が速度 $\boldsymbol{u}$ で運動しているときは，

$$A_0(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{s} \tag{2.78}$$

$$A_i(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{s}u_i \tag{2.79}$$

$$s = r - \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}}{c} \tag{2.80}$$

でベクトルポテンシャルが与えられる。このベクトルポテンシャルに x_i や t について微分をほどこして，電場と磁束密度が，

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\frac{1}{s^3}\boldsymbol{r}\times\left(\boldsymbol{r} - \frac{r\boldsymbol{u}}{c}\right)\times\frac{d}{dt'}\boldsymbol{u} + \frac{1}{s^3}\left(\boldsymbol{r} - \frac{r\boldsymbol{u}}{c}\right)\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\right] \tag{2.81}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{E}_{\text{rad}}}{cx} \tag{2.82}$$

と得られる。

(1) x_i や t についての微分

関係 $c(t - t') = r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}(t')|$ を保って x_i や t について微分を行う。まず両辺を t で微分して，

$$c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right) = \frac{\partial r}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} \tag{2.83}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{c}{c + \frac{\partial r}{\partial t'}} \tag{2.84}$$

を得，次に r を t' で微分して，

$$\frac{\partial r}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}(t')| = -\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}}{r} \tag{2.85}$$

を得る。この $\frac{\partial r}{\partial t'}$ を $\frac{\partial t'}{\partial t}$ に代入して，

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{c}{c - \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}}{r}} = \frac{r}{s} \tag{2.86}$$

を得ることより，時間に関する微分

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{r}{s}\frac{\partial}{\partial t'} \tag{2.87}$$

を得る。

次に r を x_i で微分して得られる関係式，

$$\nabla|_t r = \nabla_1 r + \frac{\partial r}{\partial t'}\nabla t' = \nabla_1 r - \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\nabla t' = -c\nabla t' \tag{2.88}$$

から

$$\nabla t' = -\frac{\nabla_1 r}{-c + \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}}{r}} \tag{2.89}$$

を得る。ここで ∇_1 は r の微分を x_i で行うことを意味する。これに，

$$\nabla_1 r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{2.90}$$

を代入してさらに，

$$\nabla t' = -\frac{\frac{\boldsymbol{r}}{r}}{-c + \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}}{r}} = -\frac{\boldsymbol{r}}{cs} \tag{2.91}$$

を得る。式 (2.88) の両辺から r をとって関係式

$$\nabla = \nabla_1 + \nabla t' \frac{\partial}{\partial t'} = \nabla_1 - \frac{\boldsymbol{r}}{cs}\frac{\partial}{\partial t'} \tag{2.92}$$

を得る。式 (2.87) と式 (2.92) を使い x_i や t について微分してベクトルポテンシャルから電場や磁束密度が求まる。

電場や磁束密度の式 (2.81), (2.82) について，速度について場合分けをして考察する。

(2) 速さ u が c より小さい場合

式 (2.81) の右辺の電場の第 1 項は r が大きい領域で $1/r$ と振る舞い遠方に到達する輻射場を表すが，第 2 項は $1/r^2$ と振る舞い遠方には到達しない電磁場である。輻射場は荷電粒子が加速度をもつときのみ生じ，速度が一定のときは発生しない。速度が一定のときは，静止した荷電粒子がつくる静的な電場と本質的には同じである。c よりはるかに遅い荷電粒子の運動により輻射として放射される電磁波は，

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{1}{s^3}\boldsymbol{x}\times\left(\boldsymbol{x} - \frac{x\boldsymbol{u}}{c}\right)\times\frac{d}{dt}\boldsymbol{u} \tag{2.93}$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{rad}} = \frac{\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{rad}}}{cx} \tag{2.94}$$

で与えられる。

(3) 速さ u が c より大きい場合

加速度をもたない荷電粒子の運動では，式 (2.81) の右辺の電場の第 1 項は 0 である。第 2 項は $1/s^2$ と振る舞い変数 s で見ると遠方には到達しない電磁場であるかのように見える。しかし u/c が 1 より大きいときは，加速度が 0 である荷電粒子の運動でも電磁波の放射が起き，s が小さいままで r が大きくなることが可能である。これは，

$$s = r - \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}}{c} = r\left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right) \tag{2.95}$$

から，速度 $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{r}$ がなす角度が

$$1-\frac{u}{c}\cos\theta=0 \tag{2.96}$$

を満たすときに起きる。この方向には，輻射場が生ずる。真空中では光の速さより速い物体はないが，物質中では光の屈折率が真空中の値より大きくなり，光の速さが真空中より小さくなれる。荷電物体は屈折率からの制限を受けないので，この光の速さより速くなれる。このとき生ずるのが，後で調べるチェレンコフ放射である。

2.5.3 往復運動による双極子放射

点電荷が z 軸上を光速よりはるかに遅い速さで往復運動しているとき放射される電磁波を求めよう。電流密度と速度は，

$$j_z=-qa\omega\sin(\omega t)\delta(x)\delta(y)\delta(z-a\cos(\omega t)) \tag{2.97}$$

$$j_x=0 \tag{2.98}$$

$$j_y=0 \tag{2.99}$$

$$\mathbf{u}=(0,0,-a\omega\sin(\omega t)) \tag{2.100}$$

で与えられ z 成分をもつので，対応する A_z を求めさらに電場や磁束密度を計算する。電流密度を式 (2.77) の右辺に代入して，$|\boldsymbol{x}|$ が a よりはるかに大きいとき，

$$A_z(\boldsymbol{x},t)=-\frac{\mu_0}{4\pi}qa\omega\ \sin\omega\left(t-\frac{|\boldsymbol{x}|}{c}\right)\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}+O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{2.101}$$

$$E_z=-\frac{\mu_0}{4\pi}qa\omega^2\cos\omega\left(t-\frac{|\boldsymbol{x}|}{c}\right)\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}+O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2}\right) \tag{2.102}$$

$$B_x=\frac{\mu_0}{4\pi}qa\omega^2\cos\omega\left(t-\frac{|\boldsymbol{x}|}{c}\right)\frac{y}{c|\boldsymbol{x}|^2}+O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2}\right) \tag{2.103}$$

$$B_y=-\frac{\mu_0}{4\pi}qa\omega^2\cos\omega\left(t-\frac{|\boldsymbol{x}|}{c}\right)\frac{x}{c|\boldsymbol{x}|^2}+O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2}\right) \tag{2.104}$$

となる。振動数 ω が有限であるとき，電場や磁束密度は距離 $|\boldsymbol{x}|$ に反比例する大きさをもつ。そのため，原点から離れた場所で距離 $|\boldsymbol{x}|$ に反比例する大きさをもつ電場や磁束密度が現れる。

2.5.4 シンクロトロン放射

点電荷が xy 面内を光速よりはるかに遅い速さで回転運動しているときに放射される電磁波を求める。電流密度は，

$$j_x=-qa\omega\sin(\omega t)\ \delta(x-a\cos(\omega t))\delta(y-a\sin(\omega t))\delta(z) \tag{2.105}$$

$$j_y = qa\omega\cos(\omega t)\ \delta(x - a\cos(\omega t))\delta(y - a\sin(\omega t))\delta(z) \tag{2.106}$$

$$j_z = 0 \tag{2.107}$$

で与えられ，x 成分と y 成分をもつので対応する A_x と A_y をまず求める。電流密度を式 (2.114) の右辺に代入して，

$$A_x(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} qa\omega \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} + O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2}\right) \tag{2.108}$$

$$A_y(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} qa\omega \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} + O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2}\right) \tag{2.109}$$

とベクトルポテンシャルが得られる。これより，さらに電場や磁束密度が

$$E_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} qa\omega^2 \cos\omega\left(t - \frac{|\boldsymbol{x}|}{c}\right)\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} + O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2}\right) \tag{2.110}$$

$$E_y = -\frac{\mu_0}{4\pi} qa\omega^2 \sin\omega\left(t - \frac{|\boldsymbol{x}|}{c}\right)\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} + O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2}\right) \tag{2.111}$$

$$B_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} qa\omega^2 \sin\omega\left(t - \frac{|\boldsymbol{x}|}{c}\right)\frac{z}{c|\boldsymbol{x}|^2} + O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2}\right) \tag{2.112}$$

$$B_y = -\frac{\mu_0}{4\pi} qa\omega^2 \cos\omega\left(t - \frac{|\boldsymbol{x}|}{c}\right)\frac{z}{c|\boldsymbol{x}|^2} + O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2}\right) \tag{2.113}$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} qa\omega^2 \left[\sin\omega\left(t - |\frac{\boldsymbol{x}|}{c}\right)\frac{x}{c|\boldsymbol{x}|^2} + \cos\omega\left(t - \frac{|\boldsymbol{x}|}{c}\right)\frac{y}{c|\boldsymbol{x}|^2}\right] + O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2}\right) \tag{2.114}$$

と計算される。この場合も振動数 ω が有限であれば，原点から離れた場所で距離 $|\boldsymbol{x}|$ に反比例する大きさをもつ電場や磁束密度が現れる。

2.5.5 チェレンコフ放射

荷電粒子が光速よりも速い一様な速度で運動する際に起きる電磁波の放射を考察する。

点電荷が z 軸上を一定の速度で運動しているとき，電流密度は，

$$j_x = 0, \quad j_y = 0 \tag{2.115}$$

$$j_z(\boldsymbol{x}, t) = qv_i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}t) \tag{2.116}$$

で与えられる。これを源とする式 (2.71) の解は，

$$A_x = 0, \quad A_y = 0 \tag{2.117}$$

$$A_z(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dv' j_i(\boldsymbol{x}', t')\frac{1}{r'} \tag{2.118}$$

で与えられる。電荷の速さが光の速さより大きく，$v > c$ が満たされるときは等速度で運動する荷電粒子がチェレンコフ光の放射を表す解，

$$A_0(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int dv'\rho(\boldsymbol{x}', t')\frac{1}{r'} \tag{2.119}$$

$$A_i(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int dv' j_i(\boldsymbol{x}', t')\frac{1}{r'} \tag{2.120}$$

となる。荷電粒子が距離 L 走ったとき生ずるチェレンコフ輻射光の振動数 ω をもつ放射エネルギーは，

$$U(\omega)\, d\omega = \frac{e^2 L}{4\pi\epsilon c^2}\left(1 - \frac{c^2}{u^2}\right)\omega\, d\omega \tag{2.121}$$

で与えられる。

2.6 正準形式

電場や磁場は，運動方程式に従うとともにエネルギーや運動量をもつ。これらを系統的に調べるのに，ラグランジアンを使うのが都合がよい。力学変数としてのベクトルポテンシャルは，時間についての2階の微分方程式に従う。だから，ベクトルポテンシャルを使い定式化すると，ゲージ場の理論はニュートン力学と同等な形式でラグランジアンに基づいて取り扱える。正準形式に基づき，力学変数であるベクトルポテンシャルの共役量を求めることから始める。ゲージ理論の特殊性を反映し，通常のニュートン力学とは異なる点が現れる。ゲージ場の理論は力学変数が束縛条件を満たす力学系になっていることである。そのため，束縛条件を満たす力学系の取り扱いが行われる。

電磁場のエネルギーと運動量は，

$$U = \int d\boldsymbol{x}\frac{1}{2}(\epsilon\boldsymbol{E}^2 + \mu\boldsymbol{B}^2) \tag{2.122}$$

$$\boldsymbol{P} = \int d\boldsymbol{x}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{2.123}$$

で与えられる。電場や磁場がその2乗に比例するエネルギー密度をもつことを示す。このエネルギーは，電荷間のポテンシャルエネルギー

$$U_{\text{電場}} = \int d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\frac{1}{2}\rho(x)\frac{1}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\rho(y) \tag{2.124}$$

と電流間のポテンシャルエネルギー

$$U_{\text{磁場}} = \int d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{y}\frac{1}{2}\boldsymbol{j}(x)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{j}(x)\frac{\mu_0}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3} \tag{2.125}$$

を運動方程式 (2.7), (2.17) を使い場がもつエネルギーに書き換えて得られる。弾性体のエネルギーの形をしているため，電気力線や磁束密度の集まりがバネのように縮む性質があることを示している。

場の波動方程式や電磁場のエネルギーを与えるラグランジアン密度は，

$$L = -\frac{1}{4}{F_{\mu\nu}}^2 + j_\mu(x)A^\mu(x) \tag{2.126}$$

である。$F_{\mu\nu}$ は

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \tag{2.127}$$

であり，電場と磁束密度は

$$E_i(x) = F_{0i}(x) \tag{2.128}$$

$$B_i(x) = \epsilon_{ijk}F_{jk}(x) \tag{2.129}$$

と与えられる。電流 j_μ は電荷をもつ物質場で表されるが，ここでは外場として取り扱う。このラグランジアン密度のオイラー・ラグランジュ方程式，

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu}L - \partial_\nu\frac{\delta}{\delta\partial_\nu A_\mu}L = 0 \tag{2.130}$$

は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{2.131}$$

である。よって結果は，式 (2.70) と一致する。

次に正準共役量を求めよう。式 (2.126) からベクトル場 $A_\mu(\boldsymbol{x}, t)$ に共役な運動量 $\Pi_0(x), \Pi_i(x)$ は，

$$\Pi_0(x) = \frac{\delta}{\delta\partial_t A_o(x)}L = 0 \tag{2.132}$$

$$\Pi_i(x) = \frac{\delta}{\delta\partial_t A_i(x)}L = F_{i0} \tag{2.133}$$

となる。$\Pi_i(x)$ は電場に一致する。場のポアッソン括弧は，

$$\{A_i(\boldsymbol{x}), \Pi_j(\boldsymbol{y})\} = \delta_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \quad \{A_0(\boldsymbol{x}), \Pi_0(\boldsymbol{y})\} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{2.134}$$

である。$A_0(x)$ の時間微分は L に含まれていないので，$A_0(x)$ の共役運動量は恒等的に 0 になる。つまり，上記ラグランジアンで記述される力学系は，力学変数が特異な条件，束縛条件を満たしている。さらに，$\partial_t A_i(x)$ を $\Pi_i(x)$ で表して，ハミルトニアンを求める。ハミルトニアンは，

$$H = \int d\boldsymbol{x}\left[\Pi_0(x)\frac{\partial}{\partial t}A_0(x) + \Pi_j(x)\frac{\partial}{\partial t}A_j(x) - L\right] \tag{2.135}$$

$$= \int d\boldsymbol{x}\left[\frac{1}{2}\Pi_j(x)^2 + \frac{1}{2}{F_{ij}}^2 + A_0(\partial_i\Pi_i - j_0)\right] \tag{2.136}$$

である。このハミルトニアンを使い，この束縛条件の時間微分を求める。正準方程式より，

$$\frac{d}{dt}\Pi_0(x) = \frac{\delta}{\delta A_0(x)} H = \partial_i \Pi_i(x) - j_0 \tag{2.137}$$

と求まる。束縛条件は時刻に無関係にいつも成立する必要があるので，

$$\partial_i \Pi_i - j_0 = 0 \tag{2.138}$$

が成立する。つまり式 (2.132) 以外に新たな束縛条件が出る。さらに式 (2.138) の時間微分から，さらに新しい束縛条件がつけ加わることもあるが，今の場合この段階で終了し，束縛条件は

$$\Phi_0(x) = \Pi_0(x) = 0 \tag{2.139}$$

$$\Phi_1(x) = \partial_i \Pi_i(x) - j_0(x) = 0 \tag{2.140}$$

であり，これらは

$$\{\Phi_0(x)\Phi_1(x)\}_{PB} = 0 \tag{2.141}$$

を満たしている。

さてこの二つの条件式はゲージ変換を引き起こす働きをするものである。それを見るため，演算子

$$G = \int d^3x\,(\lambda(x)\Phi_1(x) + \lambda_0(x)\Phi_0(x)) \tag{2.142}$$

を考えよう。この演算子は場に対して，変換，

$$\begin{aligned}\{A_i(x), G\}_{PB} &= \int d^3x' \lambda(x')\{A_i(x), \Phi_1(x')\}_{PB} \\ &= \int d^3x' \lambda(x')\delta_{ij}\partial'_j \delta(x - x') \\ &= -\partial_i \lambda(x) \end{aligned} \tag{2.143}$$

と

$$\begin{aligned}\{A_0(x), G\}_{PB} &= \int d^3x' \lambda_0(x')\{A_0(x), \Phi_0(x')\}_{PB} \\ &= \int d^3x' \lambda_0(x')\delta(x - x') \\ &= \lambda_0(x) \end{aligned} \tag{2.144}$$

を引き起こす。これはまさにゲージ変換である。つまり二つの束縛条件はゲージ変換を生成する母関数である。ところで電場や磁束密度に対しては，

$$\begin{aligned}\{\partial_j A_i(x) - \partial_i A_j(x), G\}_{PB} &= \int d^3x' \lambda(x')\{\partial_j A_i(x) - \partial_i A_j(x), \Phi_1(x')\}_{PB} \\ &= (\partial_j\partial_i - \partial_i\partial_j)\lambda(x) = 0 \end{aligned} \tag{2.145}$$

と

$$
\begin{aligned}
&\{\Pi_i(x), G\}_{PB} \\
&= \int d^3x' \left(\lambda_0(x')\{\Pi_i(x), \Phi_0(x')\}_{PB} + \lambda_1(x')\{\Pi_i(x), \Phi_1(x')\}_{PB}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{2.146}
$$

となることから，電場や磁場は変換に対して不変である。だから，電場や磁束密度から表せるゲージ不変な物理量 O_{phys} はポアッソン括弧の意味で二つの束縛条件と可換である。

$$\{O_{\text{phys}}, \Phi_0(x')\}_{PB} = 0 \tag{2.147}$$

$$\{O_{\text{phys}}, \Phi_1(x')\}_{PB} = 0 \tag{2.148}$$

さてハミルトニアンは任意の物理量 O に関する，

$$\partial_t O = \{O, H\}_{PB} \tag{2.149}$$

を満たす時間推進の生成を行う物理量であるため，エネルギーそのものである。式 (8.40) を考慮し，変数の関係式 (2.123) を代入してハミルトニアンが実際よく知られたエネルギー式 (2.122) と一致することがわかる。

空間座標の推進を生成するのは系の運動量，

$$P_i = \int d^3x \Pi_j(\boldsymbol{x}) \partial_i A_j(\boldsymbol{x}) \tag{2.150}$$

であり，式 (2.123) に一致する。

系が束縛条件を満たしていることは，束縛条件に対応する運動の自由度が凍結していることを意味する。今の場合，束縛条件が共役運動量で表されているので，対応する座標を凍結すれば，その自由度は力学系から消去できる。これはゲージ固定に対応している。束縛条件を取り込むハミルトニアンは，ラグランジュの未定定数法から，

$$H_{\text{total}} = H + \int d^3x (\lambda_0(x)\Phi_0(x) + \lambda_1(x)\Phi_1(x)) \tag{2.151}$$

で与えられる。未定係数が束縛条件から決定される場合と，束縛条件からは決定されない場合とがある。ゲージ理論は後者に属する。電場や磁場をはじめとする物理量はゲージ不変量で表されるので，運動方程式は

$$\frac{d}{dt} O_{\text{phys}} = \{O_{\text{phys}}, H_{\text{total}}\}_{PB} = \{O_{\text{phys}} H\}_{PB} \tag{2.152}$$

となり，ラグランジュの未定定数によらない。だから何をとっても運動は変わらない。しかしベクトル場は

$$\frac{d}{dt} A_i(x) = \{A_i(x), H_{\text{total}}\}_{PB}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{A_i(x), H\}_{PB} + \int d^3x\,(\lambda_0(x)\{A_i(x), \Phi_0(x)\} + \lambda_1(x)\{A_i(x), \Phi_1(x)\}) \\
&= \{A_i(x), H\}_{PB} + \int d^3x'\,(\lambda_1(x)\{A_i(x), \Phi_1(x')\}) \\
&= \Pi_i(x) - \partial_i \lambda_1(x) \qquad (2.153)
\end{aligned}
$$

を満たし，運動方程式が未定定数に依存する。このため，ベクトル場に新たな条件，例えば，

$$
\partial_i A_i(x) = 0 \qquad (2.154)
$$

を課すことにすると，未定定数は一意的に決まる。この条件の時間微分から，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\partial_i A_i(x) &= \{\partial_i A_i(x), H_{\text{total}}\}_{PB} \\
&= \{\partial_i A_i(x), H\}_{PB} \\
&\quad + \int d^3x(\lambda_0(x)\{\partial_i A_i(x), \Phi_0(x)\} + \lambda_1(x)\{\partial_i A_i(x), \Phi_1(x)\}_{PB}) \\
&= \{\partial_i A_i(x), H\}_{PB} + \int d^3x'(\lambda_1(x)\{\partial_i A_i(x), \Phi_1(x')\}) \\
&= \partial_i \Pi_i(x) - \partial_i{}^2 \lambda_1(x) \\
&= j_0(x) - \partial_i{}^2 \lambda_1(x) \qquad (2.155)
\end{aligned}
$$

となることから，

$$
\lambda_1(x) = \frac{1}{4\pi}\int d^3y \frac{1}{|x-y|} j_0(y) \qquad (2.156)
$$

と決定される。新たに課した条件をゲージ固定条件という。束縛条件が閉じた代数を満たしている理論を一般にゲージ理論という。

問 題 2

2.1 電流間のエネルギー (2.125) と電荷間のエネルギー (2.124) を足したものは，電磁場のエネルギー (2.122) になることを示せ。

3章　スカラー場

相対論的に不変な波動方程式に従うスカラー場の量子論を考察しよう。力学変数は時間や空間の位置座標の関数であるスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ である。空間の座標は，実数の集合と同値であり無限個あって稠密に分布している。空間の異なる点で場 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ が互いに独立で異なることより，場は無限個の自由度を表す。時間については，場 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ はニュートンの方程式と同じ 2 階の微分方程式に従う。そのためスカラー場は，質点の運動を拡張した形で量子化される。

場を量子化するには，場が従う波動方程式を正準形式にのっとって表しておくと見通しがよい。力学変数である場と，その共役運動量の間に正準交換関係が成り立つ。交換関係から，場の性質，場の汎関数である物理量の性質が決まり，状態の時間発展はシュレーディンガー方程式から決まる。

場の演算子が表現されている複素ベクトル空間のベクトルが真空状態や粒子状態等の物理状態を表す。この結果，波動方程式や物理量の期待値，散乱振幅等の観測と結びつく数値が量子力学的に計算できる。この際，場の理論の複素ベクトル空間が任意の数の粒子数状態のベクトルを含むため，無限個の物理量が理論的に予言される。

3.1　スカラー場の交換関係

相対論的に不変なスカラー場の波動方程式は，

$$(\partial_0^2 - \partial_i^2 + m^2)\varphi(x) = 0 \tag{3.1}$$

であり，時間や空間に関して2次の方程式である。ただし，光速 c を1とした。相対論的な不変性は系に強い制約を与えることが後でわかる。最も簡単な平面波の解は，

$$\exp i(p_0 x_0 - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}) \tag{3.2}$$

$$p_0 = E(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \tag{3.3}$$

で与えられ，すべてが時間とともに振動する周期解である。これは，場で表される物理系が振動子の集まりとみなせることを予想させる。また，エネルギー $E(\boldsymbol{p})$ と運動量 p_i とは相対論的に不変な関係を満たしていることから，ローレンツ変換や他の時空に対する対称性をもつと思われる。

スカラー場の方程式は時間に関しては，質点に対するニュートンの運動方程式と同等な形をしている。そのため，ニュートン力学でよく知られた解析力学的手法が使える。以下，ラグランジアンに基づいて解析力学の手法を展開する。

質点の運動との類推からラグランジアンが求まる。質点のラグランジアンは運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを引いたものである。 式 (3.1) の波動方程式を導くラグランジアンは，やはり運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを引いた形をした，

$$L = \int dx^3 \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right) \tag{3.4}$$

である。実際，これが求めるラグランジアンであり，変分原理から得られる式は波動方程式に一致する。

まずラグランジアンを時間積分した作用 S に関する変分原理からオイラー・ラグランジュ方程式を求めよう。

$$S = \int_V dx^4 \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right) \tag{3.5}$$

式 (3.5) で，空間座標と時間座標の積分を有限領域で行うことにする。場の変数を $\delta\varphi(x)$ だけ微小に変化させたときの作用の変化量は，被積分関数であるラグランジアンの領域内での変化分と境界からの寄与からなる。

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_V dx^4 \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi + \delta\varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 (\varphi + \delta\varphi)^2 \right) \\
&\quad - \int_V dx^4 \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right) \\
&= \int_V dx^4 (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \delta\varphi) + m^2 (\varphi \delta\varphi)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

第1項は $\delta\varphi$ の微分の関数であり，第2項は $\delta\varphi$ の関数である。二つの形を合

わせるため，第1項を部分積分する。結果は $\delta\varphi$ の領域の内部の積分と表面項の和

$$\delta S = \int_V dx^4(\delta\varphi)(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi + \int_V dS^\mu(\partial_\mu\delta\varphi)\varphi \tag{3.7}$$

となる。よって作用の変分で1次の微少量が消えるのは，波動方程式，

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi(x) = 0 \tag{3.8}$$

とともに，境界条件，

$$n_\mu\partial^\mu\varphi(x) = 0 \tag{3.9}$$

が満たされるときである。ここで n_μ は境界に垂直なベクトルである。ここまでの計算は，場の変数に関する微分である汎関数微分

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}S = \lim_{h\to 0}\frac{S[\varphi + h\delta(x',x)] - S[\varphi(x)]}{h} \tag{3.10}$$

を使うと簡単に行える。汎関数微分を使うと，上式の変分は

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}S = (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi(x) \tag{3.11}$$

と表せる。

さて，方程式の導出を場と場の1階微分からなる一般のラグランジアンの場合に行っておこう。ラグランジアン密度が，

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)) \tag{3.12}$$

と場と場の1階微分だけを含むとき，場を微少量 $\delta\varphi$ 変化させるとき，作用の変化量は，

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\mathcal{L}(\varphi(x)+\delta\varphi(x), \partial_\mu(\varphi(x)+\delta\varphi(x))) - \int d^4x\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)) \\ &= \int d^4x\left(\delta\varphi(x)\frac{\partial}{\partial\varphi(x)}\mathcal{L} + \partial_\mu\delta\varphi(x)\frac{\partial}{\partial\partial_\mu\varphi(x)}\mathcal{L}\right) \\ &= \int d^4x\delta\varphi(x)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi(x)}\mathcal{L} - \partial_\mu\frac{\partial}{\partial\partial_\mu\varphi(x)}\mathcal{L}\right) + \text{表面項}\end{aligned} \tag{3.13}$$

となる。これより作用が停留的になるためには，1次の変分量が0となることが必要である。この結果，オイラー・ラグランジュ方程式，

$$\frac{\partial}{\partial\varphi(x)}\mathcal{L} - \partial_\mu\frac{\partial}{\partial\partial_\mu\varphi(x)}\mathcal{L} = 0 \tag{3.14}$$

が成り立つ。今の場合にオイラー・ラグランジュ方程式は，波動方程式となる。また，積分領域の外には何もないので，自由端の境界条件が得られた。これで，式 (3.5) が波動方程式に対する作用であることが確認できた。

ラグランジアンがわかったので，場の変数に共役な正準運動量や交換関係が決まる。運動量は，

$$\Pi(x) = \frac{\delta}{\delta \partial_0 \varphi(x)} L = \partial_0 \varphi(x) \tag{3.15}$$

となり，力学変数の従う同時刻での正準交換関係は古典論のポアッソン括弧を置き換えて，

$$[\varphi(\boldsymbol{x}, t), \Pi(\boldsymbol{x}', t')]\delta(t - t') = i\hbar\delta(t - t')\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{3.16}$$

$$[\varphi(\boldsymbol{x}, t), \varphi(\boldsymbol{x}', t')]\delta(t - t') = 0 \tag{3.17}$$

$$[\Pi(\boldsymbol{x}, t), \Pi(\boldsymbol{x}', t')]\delta(t - t') = 0 \tag{3.18}$$

と与えられる。力学変数である場とその共役運動量の交換関係は，座標が等しい場合に 0 ではなく，座標が異なる場合には 0 になる。つまり，異なる座標をもつ場は同時刻で交換し，独立である。この結果として，独立で異なる力学変数の数は無限個であり，場の理論は無限個の自由度をもつ力学系であることがわかる。

ラグランジアンは，場と場の微分を自変数として定義されていたので，微少量は

$$\delta L = \int d^3x \left(\frac{\delta\varphi(x)\partial}{\partial\varphi(x)} L + \delta\partial_\mu\varphi(x) \frac{\partial}{\partial\partial_\mu\varphi(x)} L \right) \tag{3.19}$$

となり，場と場の微分の微少量で書かれる。

次に時間方向の平行移動に対する生成演算子であるハミルトニアンを求めよう。ハミルトニアンは，$\Pi(x)$ と $\varphi(x)$ を自変数とし，$\varphi(x)$ と $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x)$ を自変数とするラグランジアンからルジャンドル変換で，

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \Pi(x) \partial_0 \varphi(x) - L \\ &= \int d^3x \left(\frac{1}{2}\Pi(x)^2 + \frac{1}{2}\partial_i\varphi(x)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

と求まる。H の定義式より，微少量は，

$$\begin{aligned} \delta H &= \int d^3x \left(\delta\Pi(x)\partial_0\varphi(x) + \Pi(x)\delta\partial_0\varphi(x)\right) - \delta L \\ &= \int d^3x \biggl(\delta\Pi(x)\partial_0\varphi(x) + \Pi(x)\delta\partial_0\varphi(x) \\ &\qquad - \frac{\partial}{\partial\varphi(x)} L\delta\varphi(x) - \frac{\partial}{\partial\partial_\mu\varphi(x)} L\delta\partial_\mu\varphi(x) \biggr) \\ &= \int d^3x \left(\delta\Pi(x)\partial_0\varphi(x) - \frac{\partial}{\partial\varphi(x)} L\delta\varphi(x) - \frac{\partial}{\partial\partial_i\varphi(x)} L\delta\partial_i\varphi(x) \right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

となり，H の微小変化が $\Pi(x)$，$\varphi(x)$ と $\partial_i\varphi(x)$ の微小変化を使い表せることがわかる。

次に場の時間発展を調べる。式 (3.17) の交換関係と式 (3.20) のハミルトニアンより場の演算子に対するハイゼンベルグ方程式は，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial x_0}\varphi(x) = [\varphi(x), H] = i\hbar\Pi(x) \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial x_0}\Pi(x) &= [\Pi(x), H] \\ &= i\hbar((\partial_i)^2\varphi(x) - m^2\varphi(x)) \end{aligned} \tag{3.23}$$

となる。場の演算子に対するハイゼンベルグ方程式 (3.22) は $\Pi(x)$ の定義式になり，式 (3.23) とあわせて，波動方程式 (3.1) に一致する。かくして，場が，出発点の波動方程式と整合した形で量子化された。

同時刻での場の間の交換関係 (3.17) がわかったので，次に任意の時刻や空間座標における交換関係を求めよう。いま，

$$[\varphi(\boldsymbol{x}, t), \varphi(\boldsymbol{x}', t')] = \Delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t - t') \tag{3.24}$$

とおき右辺の関数を求める。この $\Delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t - t')$ は波動方程式と同時刻の条件，

$$({\partial_\mu}^2 + m^2)\Delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t - t') = 0 \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t - t')|_{t=t'} = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{3.26}$$

を満たす。まず波動方程式を満たすことから，関数はフーリエ変換で，

$$\Delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t - t') = -i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^3}\delta({p_\mu}^2 - m^2)\exp\left(ip_\mu \cdot (x - x')^\mu\right) \tag{3.27}$$

と表せる。デルタ関数を使い p_0 積分を行うと，関数がさらに，

$$\begin{aligned} &\Delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}', t - t') \\ &= -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\boldsymbol{p})}\left(\exp(ip_\mu \cdot (x - x')^\mu) - \exp(-ip_\mu \cdot (x - x')^\mu)\right) \end{aligned} \tag{3.28}$$

と求まる。この関数は 2 座標が，$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^2 - c^2(t - t')^2 \geq 0$ を満たすときと，$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^2 - c^2(t - t')^2 < 0$ を満たすときで異なる性質をもつ。前者を **spacelike** の関係，後者を **timelike** の関係とよぶ。$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')^2 - c^2(t - t')^2 \geq 0$ を満たす領域では積分変数を変換することにより，

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\boldsymbol{p})}\exp(ip_\mu \cdot (x - x')^\mu) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\boldsymbol{p})}\exp(-ip_\mu \cdot (x - x')^\mu) \end{aligned} \tag{3.29}$$

となることがわかる。2 座標が timelike の関係にあるとき，この変換は存在しないで，二つの積分は異なる。これらの結果，関数は領域ごとに

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',t-t') &= \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}J_0(m\sqrt{c^2(t-t')^2-r^2}), \quad c(t-t')\geq r\\ &= 0, \quad r \geq |c(t-t')| \qquad (3.30)\\ &= -\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}J_0(m\sqrt{c^2(t-t')^2-r^2}), \quad c(t-t')\geq -r\\ r &= |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \qquad (3.31)\end{aligned}$$

と振る舞う。$\Delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',t-t')$ は，二つの時空座標が spacelike の領域，すなわち $(x-x')^2<0$ を満たす空間領域で 0 となる。だから，二つの時空座標で場は

$$[\varphi(x),\varphi(x')]=0 \qquad (x-x')^2<0 \qquad (3.32)$$

と交換する。これは，spacelike の関係にある座標における場が独立であることを示している。場の積からつくられる任意な物理量 $O_1(\varphi(x))$ と $O_2(\varphi(x))$ も $(x-x')^2<0$ で同じ交換関係，

$$[O_1(\varphi(x)),O_2(\varphi(x'))]=0 \qquad (x-x')^2<0 \qquad (3.33)$$

を満たす。このように spacelike の関係にある二つの時空座標における物理現象や物理量は，互いに独立である。これは，光より速く伝達する情報が存在しないことを示し，因果律を表している。

四次元空間で，互いに spacelike な点の集まりからなる超平面 σ 上の異なる点で，場は互いに独立であることがわかった。だから量子力学で場に関する波動関数を記述する際，超平面 σ の上の場は独立変数として扱うことができる。spacelike な超平面の一つの例は，$t=$ 一定 の面である。この面上の座標 $x_\mu^1=(t,\boldsymbol{x}_1)$ と $x_\mu^2=(t,\boldsymbol{x}_2)$ をもつ 2 点は，

$$(x_1-x_2)^2=-(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)^2<0$$

と spacelike なっている。

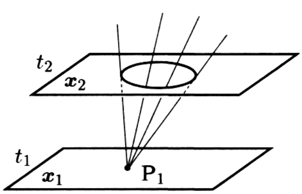


図 3.1 $P_1(t_1,\boldsymbol{x}_1)$ から発した信号の $t=t_2$ での位置

3.2 エネルギー 運動量，ならびに角運動量保存則

場の方程式 (3.1) は時空座標の微分を含み，時空座標があからさまには出てこない。そのため，方程式は時空に関する平行移動

$$\begin{aligned} x_\mu &\to x'_\mu = x_\mu + c_\mu \\ \varphi(x) &\to \varphi(x') \end{aligned} \tag{3.34}$$

に関して不変である。また微分演算子が，時空座標に関して対称であるため，空間に関する回転や時空に関するローレンツ変換，

$$x_\mu \to x'_\mu = \Lambda_{\mu,\nu} x^\nu \tag{3.35}$$

$$\varphi(x) \to \varphi(x') \tag{3.36}$$

$$\Lambda_{\mu,\nu}\Lambda^{\nu,\mu'} = g_\mu^{\mu'} \tag{3.37}$$

に対する不変性をもつ。これらの座標変換を座標に対して引き起こす演算子は，

$$p_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{3.38}$$

$$l_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \tag{3.39}$$

であり，交換関係

$$[p_\mu, p_\nu] = 0 \tag{3.40}$$

$$[l_{\mu\nu}, p_\rho] = i(g_{\mu\rho}p_\nu - g_{\nu\rho}p_\rho) \tag{3.41}$$

$$[l_{\mu\nu}, l_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\rho}l_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}l_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}l_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}l_{\mu\rho}) \tag{3.42}$$

を満たしている。座標の平行移動と四次元座標の回転とがなす変換群をポアンカレ変換とよぶ。これらの座標変換に対してラグランジアンが不変であることより，対応した保存量が存在する。以下それを求めよう。

スカラー場の波動方程式は明らかに，すべての時空の位置について同等であり特別な位置をもたない。これが座標の平行移動に対する不変性である。この性質より，エネルギー運動量テンソルが存在して，保存則を満たす。

エネルギー運動量テンソルは，

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \partial_\mu\varphi\frac{\delta}{\delta\partial_\nu\varphi}\mathcal{L} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \\ &= \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \\ &= \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2\right) \end{aligned} \tag{3.43}$$

と表せる。波動方程式を使うことより，このエネルギー運動量テンソルが保存則を満たすこと，すなわち関係式，

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = (\partial_\mu)^2\varphi(x)\partial_\nu\varphi(x) + \partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\partial_\nu\varphi(x) - \partial_\nu\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2\right)$$
$$= 0 \tag{3.44}$$

を満たすことが容易にわかる。これよりエネルギーと運動量ベクトル

$$P_0 = \int d^3x T_{00} \tag{3.45}$$

$$P_i = \int d^3x T_{i0} \tag{3.46}$$

は時間によらない保存量となっている。

上記の保存則は作用積分が場に関する連続変換に対して不変であるとき成立する「ネーター (Noether) の定理」の一例である。次に，一般的なネーターの定理を示そう。

ネーターの定理

ラグランジアン密度が場の変数の連続変換に対して不変であるとき，保存する電荷密度と電流密度が存在し全電荷は保存する。

便宜上，後で述べる複数個のスカラー場からなる理論をまず考察する。これらの場を混合する微小変換，

$$\varphi_i(x) \to \varphi_i(x) + \epsilon_a C^a_{ik}\varphi_k(x) \tag{3.47}$$

に対してラグランジアン密度が不変であるとしよう。ここで ϵ_a は変換の微小なパラメーターであり，C^a_{ik} はある決まった係数を表すものとする。この変換に対するラグランジアン密度の変化量は

$$\delta\mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial_\mu\varphi_i(x)) = \epsilon_a C^a_{ik}\varphi_k(x)\frac{\partial}{\partial\varphi_i(x)}\mathcal{L} + \epsilon_a C^a_{ik}\partial_\mu\varphi_k(x)\frac{\partial}{\partial\partial_\mu\varphi_i(x)}\mathcal{L}$$
$$= \epsilon_a\left(C^a_{ik}\varphi_k(x)\frac{\partial}{\partial\varphi_i(x)}\mathcal{L} + C^a_{ik}\partial_\mu\varphi_k(x)\frac{\partial}{\partial\partial_\mu\varphi_i(x)}\mathcal{L}\right) \tag{3.48}$$

である。これにオイラー・ラグランジュ方程式 (3.14) を代入すると，

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon_a\left(C^a_{ik}\varphi_k(x)\partial_\mu\frac{\partial}{\partial\partial_\mu\varphi_i(x)}\mathcal{L} + C^a_{ik}\partial_\mu\varphi_k(x)\frac{\partial}{\partial\partial_\mu\varphi_i(x)}\mathcal{L}\right)$$
$$= \epsilon_a\partial_\mu C^a_{ik}\varphi_k(x)\frac{\partial}{\partial\partial_\mu\varphi_i(x)}\mathcal{L} = \epsilon_a\partial_\mu j^a_\mu \tag{3.49}$$

$$j^a_\mu = C^a_{ik}\varphi_k(x)\frac{\partial}{\partial\partial_\mu\varphi_i(x)}\mathcal{L} \tag{3.50}$$

となる。この変換に対してラグランジアンが不変であれば，

$$\delta\mathcal{L} = 0 \tag{3.51}$$

となり，場から定義される電荷密度と流れの密度が連続の式

$$\partial^\mu j^a_\mu = 0 \tag{3.52}$$

を満たす。連続の式から，全電荷

$$Q^a = \int d^3x j^a_0(x) \tag{3.53}$$

は時間によらない一定値をとる保存量になっていることがわかる。そのため連続の式は保存則ともよばれる。以上がネーターの定理である。

今までの変換では，時空の座標は一定に保たれたまま場が変換された。座標が平行移動 $x_\mu \to x_\mu + c_\mu$ か 4 次元回転 $x_\mu \to \Lambda_{\mu\nu} x^\mu$ の形で変換される際に，作用積分が不変であるとき，同様な保存則が成立する。場を通してだけ座標による系では，座標変換に対するラグランジアン密度の変化量は，場を通して決まる。微小な平行移動に対して場は，

$$\varphi(x_\mu) \to \varphi(x_\mu + c_\mu) = \varphi(x_\mu) + c_\mu \partial_\mu \varphi(x_\mu) \tag{3.54}$$

と変換される。このときラグランジアン密度の変化量は，$\varphi(x)$ を通して寄与する部分と $\partial_\mu \varphi(x)$ を通して寄与する部分とからなり，

$$c_\mu \partial_\mu \mathcal{L} = c_\mu \left(\partial_\mu \varphi_k(x) \frac{\partial}{\partial \varphi_k(x)} \mathcal{L} + \partial_\mu \partial_\nu \varphi_k(x) \frac{\partial}{\partial \partial_\nu \varphi_k(x)} \mathcal{L} \right) \tag{3.55}$$

と表せる。これにオイラー・ラグランジュ方程式 (3.14) を代入して，

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathcal{L} &= \partial_\mu \varphi_k(x) \partial_\nu \frac{\partial}{\partial \partial_\nu \varphi_k(x)} L + \partial_\mu \partial_\nu \varphi_k(x) \frac{\partial}{\partial \partial_\nu \varphi_k(x)} \mathcal{L} \\ &= \partial_\nu \left(\partial_\mu \varphi_k(x) \frac{\partial}{\partial \partial_\nu \varphi_k(x)} \mathcal{L} \right) \end{aligned} \tag{3.56}$$

を得る。これより，エネルギー運動量テンソル

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_k(x) \frac{\partial}{\partial \partial_\nu \varphi_k(x)} \mathcal{L} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{3.57}$$

が，連続の式

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{3.58}$$

を満たすことがわかる。

次に，座標の回転に対して引き起こされる場の変化量や，ラグランジアン密度の変化量を考える。微小変換として，

$$\begin{aligned} x_\mu &\to x_\mu + \epsilon_{\mu\nu} x^\nu \\ \epsilon_{\mu\nu} &= -\epsilon_{\nu\mu} \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\to \varphi(x_\mu + \epsilon_{\mu\nu} x^\nu) \\ &= \varphi(x_\mu) + \epsilon_{\mu\nu} x^\nu \partial_\mu \varphi(x_\mu) \end{aligned} \tag{3.60}$$

とする。ラグランジアン密度の変化量は

$$\epsilon_{\mu\nu}x^\nu\partial_\mu\mathcal{L} = \epsilon_{\mu\nu}x^\nu\partial_\mu\varphi(x)\frac{\partial}{\partial\varphi(x)}\mathcal{L} + \partial_\rho(\epsilon_{\mu\nu}x^\nu\partial_\mu\varphi(x))\frac{\partial}{\partial_\rho\varphi(x)}\mathcal{L} \tag{3.61}$$

である。これにオイラー・ラグランジュ方程式 (3.14) を代入して，連続の式

$$\partial_\mu\mathcal{M}^{\mu\nu\rho} = 0 \tag{3.62}$$

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu} \tag{3.63}$$

が得られる。よって，

$$M^{\nu\rho} = \int d^3x\mathcal{M}^{0\nu\rho} \tag{3.64}$$

が保存量になっている。このようにエネルギー運動量テンソルから，時空の平行移動を行う生成子であるエネルギー，運動量 (3.46) や，時空の回転やローレンツ変換を行う生成子である角運動量やブースト演算子が求まる。座標変換の性質から，これら変換の生成演算子はポアンカレ変換群に対応する代数関係

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{3.65}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(\delta_{\mu\rho}P_\nu - \delta_{\nu\rho}P_\mu) \tag{3.66}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\delta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + \delta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \delta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \tag{3.67}$$

を満たす。実際，場が満たす正準交換関係から，生成演算子はこれらの交換関係を満たし，また場に対して変換を引き起こす。かくしてポアンカレ変換群を表現する空間が構成されることがわかる。

Schwinger の変分原理

さらに変分原理と変換の生成子との関連を有限領域で定義された作用積分から見てみよう。以下の有限領域で定義された作用積分，

$$S = \int_V dx\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)) \tag{3.68}$$

の変化量は，

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{V+\delta V} dx\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)) - \int_V dx\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)) \\ &= \int_V dx\partial_\nu(c_\mu T^{\mu\nu}) + \int dxc_\mu\partial^\mu\varphi(x)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathcal{L} - \partial_\mu\frac{\partial}{\partial_\mu\varphi}\mathcal{L}\right) \\ &= \int dS_\nu c_\mu T^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{3.69}$$

となる。上式で場がオイラー・ラグランジュ方程式を満たすとした。

場が領域内部でオイラー・ラグランジュ方程式を満たす場合，作用は境界での場の値で決定される。境界の方向として時間が一定の面，$n_\mu = (1, 0, 0, 0)$ を選ぶと，作用の変分は，

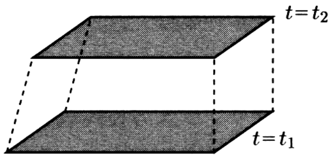


図 3.2 作用積分の積分領域

$$\delta S = \int_{t_1} d^3x C_\mu T^{\mu 0} - \int_{t_2} d^3x C_\mu T^{\mu 0}$$
$$= C_\mu (P^\mu_{t_1} - P^\mu_{t_2}) \tag{3.70}$$

となる。つまり作用の変分量は微小パラメーターに比例して，比例係数が変換の生成子で，交換関係

$$[P_0, \varphi(x)] = i\partial_0 \varphi(x) \tag{3.71}$$
$$[P_i, \varphi(x)] = i\partial_i \varphi(x) \tag{3.72}$$

を満たすエネルギーや運動量となっていることがわかる。座標の回転やローレンツ変換に対する生成子が同様な方法で得られる。

3.3 フォック空間と粒子状態

ポアンカレ変換群の交換関係を表現する空間が，ヒルベルト空間上のベクトルから構成される。このベクトルを具体的に表すため，場を座標の関数から運動量の関数へフーリエ変換をする。

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2E(\boldsymbol{p})}} (a(\boldsymbol{p}) e^{i(E(\boldsymbol{p})x_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} + h.c.) \tag{3.73}$$

これを場の交換関係に代入することにより，展開係数の交換関係が，

$$[a(\boldsymbol{p}_1), a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)] = \delta(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2) \tag{3.74}$$
$$[a(\boldsymbol{p}_1), a(\boldsymbol{p}_2)] = 0 \tag{3.75}$$
$$[a^\dagger(\boldsymbol{p}_1),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)] = 0 \tag{3.76}$$

と求まる。また ハミルトニアンと運動量は，

$$H = \int d^3p E(\boldsymbol{p}) \left(a^\dagger(\boldsymbol{p}) a(\boldsymbol{p}) + \frac{1}{2} \right) \tag{3.77}$$
$$P_i = \int d^3p\, p_i (a^\dagger(\boldsymbol{p}) a(\boldsymbol{p})) \tag{3.78}$$

と表せ，場との間に交換関係

$$[P_\mu, a(\boldsymbol{p})] = -p_\mu a(\boldsymbol{p}) \tag{3.79}$$

$$[P_\mu, a^\dagger(\boldsymbol{p})] = p_\mu a^\dagger(\boldsymbol{p}) \tag{3.80}$$

を満たす。交換関係とハミルトニアンから，この物理系は各運動量ごとに一つの調和振動子が対応する多体系であることがわかる。このため，多体系の固有状態は調和振動子の場合と同様に構成される。まず，基底状態を考えよう。基底状態は，ヒルベルト空間の真空状態 $|0\rangle$ ですべての消滅演算子で消える状態

$$a(\boldsymbol{p})|0\rangle = 0 \tag{3.81}$$

である。この状態は

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= E_0|0\rangle \\ E_0 &= \int d^3p\,\frac{1}{2}E(\boldsymbol{p}) \end{aligned} \tag{3.82}$$

を満たすエネルギーの固有状態である。またこれに生成演算子をかけた状態

$$|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \cdots, \boldsymbol{p}_n\rangle = \prod_{i=1}^{n}(a(\boldsymbol{p}_i))^\dagger|0\rangle \tag{3.83}$$

もハミルトニアンの固有状態であり，

$$\begin{aligned} H|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \cdots, \boldsymbol{p}_n\rangle &= E_n|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \cdots, \boldsymbol{p}_n\rangle \\ E_n &= E_0 + \sum_{i=1}^{n} E(\boldsymbol{p}_i) \end{aligned} \tag{3.84}$$

を満たす。運動量については，

$$\begin{aligned} P_i|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \cdots, \boldsymbol{p}_n\rangle &= P_i^n|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \cdots, \boldsymbol{p}_n\rangle \\ P_i^n &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i \end{aligned} \tag{3.85}$$

となる。これより，この状態は，各エネルギーと各運動量の和をもつ状態であることがわかる。真空のエネルギーは 0 ではなく，零点振動に対応する正の値である。すべての励起状態のエネルギーは，この値に各粒子エネルギーが足されたものである。つまりこの値がエネルギーの原点になっている。エネルギーの原点はどこにとってもよいことより，零点エネルギーを差し引いたエネルギーを使うことでかまわない。すると真空のエネルギーは 0 となる。

一粒子状態のエネルギーと運動量の間には，m を質量とする相対論的な関係式が成り立っていた。さらに，真空に生成演算子を二度かけた状態は，二つの和のエネルギーと運動量をもつ。このため，この状態は 2 粒子状態である。演算子をさらにかけたベクトルが多粒子状態を表す。これらの状態ベクトルが張

る空間をフォック空間という。フォック空間は完全系をなしている。それを見るため，次の演算子

$$
\begin{aligned}
I = |0\rangle\langle 0| &+ \int d\boldsymbol{p}\, a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle\langle 0|a(\boldsymbol{p}) \\
&+ \int \frac{d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2}{2!} a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle\langle 0|a(\boldsymbol{p}_1)a(\boldsymbol{p}_2) + \cdots \\
&+ \int \frac{1}{L!}\prod_l d\boldsymbol{p}_l a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)|0\rangle\langle 0|\prod_l a(\boldsymbol{p}_l) + \cdots
\end{aligned} \tag{3.86}
$$

が単位演算子であることを示そう。演算子 I を任意の状態

$$
|\Psi\rangle = \int \prod_l d^3q_l f(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_L) \prod_l a^\dagger(\boldsymbol{q}_l)|0\rangle \tag{3.87}
$$

にかける。すると交換関係と真空の式より，

$$
\begin{aligned}
I|\Psi\rangle &= \int \prod_l d^3q_l f(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_L) \int \frac{1}{L!}\prod_l d\boldsymbol{p}_l a^\dagger(\boldsymbol{p}_l)|0\rangle \delta(\boldsymbol{q}_l - \boldsymbol{p}_j) \\
&= \int f(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_L) \prod_l a^\dagger(\boldsymbol{p}_l)|0\rangle \\
&= |\Psi\rangle
\end{aligned} \tag{3.88}
$$

となる。これより，演算子 I が

$$
I = 1 \tag{3.89}
$$

を満たす単位演算子であり，すべての多粒子状態の集まりで完全性を満たす空間が構成されていることがわかる。I の定義で $L!$ で割っているのは，粒子を互いに区別しないことを意味している。これは，次に述べる同種粒子の性質を反映している。

3.4　ボース・アインシュタイン統計

前章で構成された多粒子状態を表すベクトルは，交換関係を満たす場の演算子で構成されていた。そのためこれらは，自動的に同種粒子としての対称性を備えた表現空間をなしている。では，多粒子波動関数はいかなる性質をもつだろうか?　粒子の座標を使い波動関数を

$$
\Psi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \langle 0|\varphi(\boldsymbol{x}_1)\varphi(\boldsymbol{x}_2)\cdots\varphi(\boldsymbol{x}_n)|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \cdots, \boldsymbol{p}_n\rangle \tag{3.90}
$$

と行列要素で表示しよう。ここで議論を簡単にするため，時間にどう依存するかは見ないことにする。また，運動量と座標はすべて異なる値であるとする。場の交換関係より，

$$\varphi(\boldsymbol{x}_1)\varphi(\boldsymbol{x}_2) = \varphi(\boldsymbol{x}_2)\varphi(\boldsymbol{x}_1) \tag{3.91}$$

が成り立つため，波動関数は座標を入れ替えても変わらず，

$$\Psi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \Psi(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \tag{3.92}$$

となる。多体波動関数は任意の座標の交換に対して対称的である。だから Ψ は対称関数であり，多体波動関数はボース・アインシュタイン統計を満たしている。量子力学の一般的な方法に基づき，機械的に力学変数とその共役量の間の交換関係を場に対して設定すると，同種粒子多体系はボース・アインシュタイン統計を満たしている。スカラー場の理論は，ボース・アインシュタイン統計を満たす粒子だけを表すことを意味し一見不思議である。実は，整数スピン粒子は必ず場の性質が交換関係で規定され，結果としてボース・アインシュタイン統計を満たす。一方，半整数スピン粒子は場の性質が反交換関係で規定され，結果としてフェルミ・ディラック統計を満たすことが後でわかる。スピンと統計の関係は，こういう一見不可思議なしかし深い意味をもつ重要な関係である。

ボース・アインシュタイン統計を満たす粒子は一つの状態に何個でも占めることができる。このため，一つの状態に多くの粒子が凝縮するボース・アインシュタイン凝縮が可能である。この事情を同じ座標や運動量の状態で考えてみよう。n 個の粒子が同じ座標にある状態や，同じ運動量にある状態は，

$$(\varphi(\boldsymbol{x}))^n|0\rangle \tag{3.93}$$

$$(a^\dagger(\boldsymbol{p}))^n|0\rangle \tag{3.94}$$

と表せる。整数 n はいかなる大きな数になってもよい。n が大きくなると状態は古典的な性質を帯びてくる。その代表的な状態として，以下のような特殊な状態，コヒーレント状態が考えられる。

$$|f\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}(fa^\dagger(\boldsymbol{p}))^l|0\rangle \tag{3.95}$$

コヒーレント状態に消滅演算子をかけると，

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{p})|f\rangle &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} a(\boldsymbol{p})(fa^\dagger(\boldsymbol{p}))^l|0\rangle \\ &= f\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(l-1)!}(fa^\dagger(\boldsymbol{p}))^{l-1}|0\rangle \end{aligned} \tag{3.96}$$

となることより，コヒーレント状態は消滅演算子や生成演算子の固有状態となっていて，

$$\begin{aligned} (a(\boldsymbol{p}))^p|f\rangle &= f^p|f\rangle \\ \langle f|(a^\dagger(\boldsymbol{p}))^p &= \langle f|(\overline{f})^p \end{aligned} \tag{3.97}$$

を満たしていることがわかる。この状態はスカラー場が凝縮している状態を表す。零運動量の演算子 $a^\dagger(\mathbf{0})$ の状態が凝縮しているときは,

$$|f\rangle = \exp(fa^\dagger(\mathbf{0}))|0\rangle \tag{3.98}$$

$$a(\mathbf{0})|f\rangle = f|f\rangle \tag{3.99}$$

である。この状態は，場の演算子に対して,

$$\varphi(x)^{(+)}|f\rangle = f|f\rangle \tag{3.100}$$

$$\langle f|\varphi(x)^{(-)} = \langle f|\overline{f} \tag{3.101}$$

と

$$\langle f|\varphi(x)|f\rangle = (f+\overline{f})\langle f|f\rangle \tag{3.102}$$

を満たしている。だからスカラー場の期待値が一定になる状態はスカラー場の零運動量のモードが凝縮した状態である。有限運動量のモードや，運動量について線形結合したモードが凝縮したときは，期待値は空間に依存する。

$$\langle f|\varphi(x)|f\rangle = (f(x)+\overline{f}(x))\langle f|f\rangle \tag{3.103}$$

このように場が凝縮した状態がボース統計に従う粒子で実現される。

3.5 自己相互作用

場について3次以上の $V(\phi)$ では，波動方程式は,

$$(\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\varphi(x) = \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}V \tag{3.104}$$

となる。この方程式の解をグリーン関数に基づき計算しよう。$V=\lambda\phi(x)^4$ のときは,

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}V = 4\lambda\phi(x)^3 \tag{3.105}$$

である。このため波動方程式は場の演算子について線形ではなくなる。線形方程式の場合は，量子多体系の固有状態が生成消滅演算子で構成されるとともに，粒子状態とみなせることを前の章で見た。非線形方程式の場合は固有状態は簡単には求まらない。しかし，非線形項 V が小さいときは，近似的に V についての摂動展開が使える。この場合，粒子状態間での V による遷移が起こり，粒子状態が影響を受けることになる。つまり非線形項がある場合は相互作用している波を表すことになる。

微分方程式 (3.104) はグリーン関数,

$$(\partial_\mu\partial^\mu - m^2)G(x-y) = \delta(x-y) \tag{3.106}$$

を使うことにより，積分方程式

$$\phi(x) = \phi(x)^{(0)} + 4\lambda \int dy G(x-y)\phi(y)^3 \tag{3.107}$$

に書き直せる。ただし，

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\phi(x)^{(0)} = 0 \tag{3.108}$$

を満たす任意な関数をつけ足しても微分方程式を満たすことには変わらない。つまり，線形方程式を満たす関数だけの不定性がある。この事情は，微分方程式の解は一意には決まらないことに由来する。微分方程式に加えて，境界条件を課すことにより解は一意的に決まる。グリーン関数も，境界条件を与えて初めて決まる。時間についての境界条件

$$x^0 - y^0 \to -\infty, \quad G^R(x-y) = 0 \tag{3.109}$$

$$x^0 - y^0 \to \infty, \quad G^A(x-y) = 0 \tag{3.110}$$

を満たすグリーン関数を，遅延 (retarded) グリーン関数，先進 (advanced) グリーン関数とよぶ。これらを使い，

$$\phi(x) = \phi(x)_{\text{in}} + 4\lambda \int dy\, G^R(x-y)\phi(y)^3 \tag{3.111}$$

$$\phi(x) = \phi(x)_{\text{out}} + 4\lambda \int dy\, G^A(x-y)\phi(y)^3 \tag{3.112}$$

と表せる。また，両辺差し引くことにより，

$$\phi(x)_{\text{out}} = \phi(x)_{\text{in}} + 4\lambda \int dy\, G^F(x-y)\phi(y)^3 \tag{3.113}$$

$$G^F(x-y) = G^A(x-y) - G^R(x-y) \tag{3.114}$$

が得られる。ここで $\phi(x)_{\text{in}}$ や $\phi(x)_{\text{out}}$ は自由場の線形波動方程式を満たす。ところで線形方程式の解は簡単に求まる。また線形方程式の解に対して同時刻交換関係を満たすようにさせると任意の時刻での交換関係も容易に決まる。このため自由場 $\phi(x)_{\text{in}}$ や $\phi(x)_{\text{out}}$ で張られる多体状態やその性質は，前の章で議論した自由場のものに一致する。ただし，$\phi(x)_{\text{in}}$ で張られる状態と $\phi(x)_{\text{out}}$ で張られる状態は互いに直交するわけではない。これらの間の遷移振幅が散乱振幅である。

多体グリーン関数

場の理論では，すべての物理量が場を使い表せる。だから，場の積の真空期待値が重要な役割を演ずる。N 個の場の積の期待値，

$$\langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\cdots\phi(x_N)|0\rangle \tag{3.115}$$

$$\langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\cdots\phi(x_N)|0\rangle \tag{3.115}$$

を N 体グリーン関数という。多体ベクトル空間の情報や，物理量の値，確率振幅等はすべて N 体グリーン関数より計算される。

3.6　内部自由度と内部対称性

今までは，ただ一つのスカラー粒子を対象とした理論を考えてきた。そのため，対応する場は中性なスカラー場であった。ここで粒子の種類が複数である物理系を考察しよう。この系を記述するには，それぞれの粒子に対応する複数の場が必要である。同じ性質をもつ独立な粒子が複数ある物理系は，内部自由度をもつ場の理論として表現される。いま，n 個のスカラー場 $\varphi_i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$ がすべて同じ質量と同じ相互作用をもつとしよう。この系のラグランジアンは

$$L=\int dx^3\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_i)^2+V\left(\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i)^2\right)\right) \tag{3.116}$$

である。このラグランジアンは，変換パラメーターに依存する任意の直交行列による場の変換

$$\begin{gathered}\varphi_i(x)\to R_{ij}\varphi_j(x)\\ \sum_j R_{ij}R_{jk}=\delta_{ik}\end{gathered} \tag{3.117}$$

に対して不変である。無限小のパラメーター ϵ^a による単位変換 I からわずかにずれた変換を，

$$R_{ij}=\delta_{ik}+i\sum_a\epsilon^a T^a_{ij} \tag{3.118}$$

と表す。ここで，行列の間に閉じた代数関係式であるリー代数

$$[T^a,T^b]=if^{abc}T^c \tag{3.119}$$

が成立しているとする。係数 f^{abc} はリー代数を特徴づけている構造定数である。この理論は，連続変換に対して不変であるので，前述のネーターの定理から，保存電流

$$j^a_\mu=\varphi_i(x)T^a_{ij}\frac{\delta}{\delta(\partial_\mu\varphi_j(x))}L \tag{3.120}$$

$$\partial^\mu j^a_\mu=0 \tag{3.121}$$

が存在することが導かれる。実際この電流が連続の式を満たすことは，容易にわかる。

上記の電荷密度を空間積分した保存電荷は，

$$Q^a = \int d^3x\, j_0(x)^a \tag{3.122}$$

$$\frac{d}{dt}Q^a = 0 \tag{3.123}$$

である。場の交換関係

$$[\varphi_i(x), \Pi_j(y)]\delta(x_0 - y_0) = i\hbar\delta^4(x-y)\delta_{ij} \tag{3.124}$$

$$[\varphi_i(x), \varphi_j(y)]\delta(x_0 - y_0) = 0 \tag{3.125}$$

$$[\Pi_i(x), \Pi_j(y)]\delta(x_0 - y_0) = 0 \tag{3.126}$$

を使うと，この電荷は理論の不変性を反映したリー代数 (3.119),

$$[Q^a, Q^a] = if^{abc}Q^c \tag{3.127}$$

を満たすことがわかる。また場 $\varphi_i(x)$ はこの電荷により変換される。このため，この系は保存量をもち，かつ粒子状態はこのリー代数を表現する基底ベクトルになっている。この事情は相互作用がある系でも変わらない。そのため，スカラー場が相互作用をしている系で，理論の不変性を反映した恒等式が成立することになる。電荷と場の間には交換関係

$$[Q^a, \varphi_i(x)] = iT^a_{ij}\varphi_j(x) \tag{3.128}$$

が成立し，電流密度と場の間にも交換関係

$$[j^a_0(x), \varphi_i(y)]\delta(x_0 - y_0) = iT^a_{ij}\varphi_j(y)\delta^4(x-y) \tag{3.129}$$

が成立する。

粒子状態は変換群の表現をつくる。有限変換を引き起こす演算子は，

$$U(\xi) = \exp(i\xi^\alpha Q^\alpha) \tag{3.130}$$

となるので，状態に作用すると，

$$U(\xi)|i\rangle = \sum_j D_{ij}(\xi)|j\rangle \tag{3.131}$$

$$D_{ij}(\xi) = \langle j|\exp(i\xi^\alpha Q^\alpha)|i\rangle \tag{3.132}$$

と変換する。この関数 $D_{ij}(\xi)$ は変換群と変換ベクトルに固有な関数である。

3.7 内部対称性と相互作用

物理系が対称性をもつとき，保存電流が存在することを見た。さらに相互作用が対称的であるとき，量子論はいかなる性質をもつことになるだろうか? 一般に相互作用がある系では，定常状態であるハミルトニアンの固有状態を具体的に求めることは非常に難しい。しかし，固有状態がわからなくても，状態

の間の関係式を知ることができる。場が生成演算子や消滅演算子で書かれるため，場の積の期待値である多体グリーン関数の性質にもこれは反映される。

保存電荷を Q^a とする。Q^a は保存則を満たすとともに，場との交換関係

$$\dot{Q}^a = 0 \tag{3.133}$$

$$[Q^a, \varphi_i(x)] = iT^a_{ij}\varphi_j(x) \tag{3.134}$$

を満たす。通常，基底状態は一意的であり，また変換に対して

$$Q^a|0\rangle = 0 \tag{3.135}$$

と不変である。このとき，多体グリーン関数

$$\langle 0|\phi_{i_1}(x_1)\phi_{i_2}(x_2)\cdots\phi_{i_N}(x_N)|0\rangle \tag{3.136}$$

は簡単な関係式を満たしている。

簡単のために2点グリーン関数

$$\langle 0|\phi_{i_1}(x_1)\phi_{i_2}(x_2)|0\rangle \tag{3.137}$$

で考察する。生成子 Q^a で生成されるユニタリー演算子 $U(t^a)$ により，状態や場は

$$Q^a|0\rangle = 0 \tag{3.138}$$

$$U(t^a)|0\rangle = |0\rangle \tag{3.139}$$

$$U(t^a)\phi_i(x)U^\dagger(t^a) = R_{ij}(t)\phi_j(x) \tag{3.140}$$

$$R_{i_1 j}(t)R^\dagger_{j i_2}(t) = \delta_{i_1 i_2} \tag{3.141}$$

と変換される。この変換を上の2点グリーン関数に施して

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\phi_{i_1}(x_1)\phi_{i_2}(x_2)|0\rangle \\
&\quad = \langle 0|U^\dagger(t^a)U(t^a)\phi_{i_1}(x_1)U^\dagger(t^a)U(t^a)\phi_{i_2}(x_2)U^\dagger(t^a)U(t^a)|0\rangle \\
&\quad = \langle 0|U(t^a)\phi_{i_1}(x_1)U^\dagger(t^a)U(t^a)\phi_{i_2}(x_2)U^\dagger(t^a)|0\rangle \\
&\quad = R_{i_1 k_1}(t^a)R_{i_2 k_2}(t^a)\langle 0|\phi_{k_1}(x_1)\phi_{k_2}(x_2)|0\rangle
\end{aligned} \tag{3.142}$$

を得る。この等式が任意の t^a の値で成立するのは，左辺が $\delta_{i_1 i_2}S(x_1 - x_2)$ となる場合に限られる。よって2点グリーン関数は場の種類によらない。

別の方法で，

$$\begin{aligned}
&\langle 0|[Q^a, \phi_{i_1}(x_1)\phi_{i_2}(x_2)]|0\rangle \\
&\quad = \langle 0|[Q^a, \phi_{i_1}(x_1)]\phi_{i_2}(x_2) + \phi_{i_1}(x_1)[Q^a, \phi_{i_2}(x_2)]|0\rangle \\
&\quad = T^a_{i_1 k_1}\langle 0|\phi_{k_1}(x_1)\phi_{i_2}(x_2)|0\rangle + T^a_{i_2 k_2}\langle 0|\phi_{i_1}(x_1)\phi_{k_2}(x_2)|0\rangle \\
&\quad = 0
\end{aligned} \tag{3.143}$$

からも2点グリーン関数が場の種類によらないことがわかる。

また，電流を含むグリーン関数，

$$\Gamma^a_{\mu i}(q) = \int dz \langle 0|T(j^a_\mu(z)\varphi_i(0))|0\rangle e^{iqz} \tag{3.144}$$

は保存則を反映した関係式

$$\begin{aligned} q^\mu \Gamma^a_{\mu i}(q) &= \int dz \langle 0|T(j^a_\mu(z)\varphi_i(0))|0\rangle(-i\partial_\mu)e^{iqz} \\ &= \int dz (i\partial_\mu)\langle 0|T(j^a_\mu(z)\varphi_i(0))|0\rangle e^{iqz} \\ &= \int dz \langle 0|T((i\partial_\mu j^a_\mu(z)))\varphi_i(0)|0\rangle e^{iqz} \\ &\quad + \int dz i\langle 0|[j^a_0(z),\ \varphi_i(0)]|0\rangle e^{iqz}\delta(z_0) \\ &= \int d\boldsymbol{z}\, i\langle 0|[j^a_0(\boldsymbol{z}),\ \varphi_i(0)]|0\rangle e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{z}} \end{aligned} \tag{3.145}$$

を満たしている。式 (3.145) の右辺は $\boldsymbol{q} \to 0$ の極限で $i\langle 0|[Q^a, \varphi_i(0)]|0\rangle$ となり，変換に対して不変な基底状態では 0 となる。T 積は，式 (6.176)，式 (6.177) で定義される。

3.8 対称性の自発的破れ

3.8.1 南部–Goldstone 定理

今までは基底状態が，変換に対して不変である場合を考察した。次に，ラグランジアンを不変にする変換に対して基底状態が不変でなく別の状態に変わる場合を考える。

内部対称性をもち，図 3.3 のように

$$\varphi_i(x) \to R_{ij}\varphi_j(x) \tag{3.146}$$

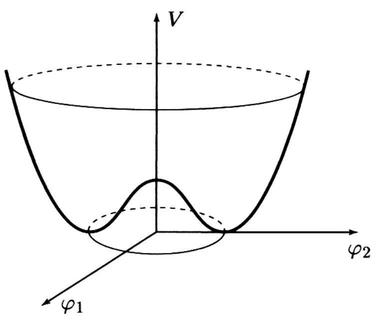


図 3.3 $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ が極大となる $V(\varphi)$

に対して不変な $V[\varphi_i(x)]$ で $\varphi_i(x)=0$ が極小ではなく極大になる場合を考察する。

このときは，基底状態は $\varphi_i(x)\neq 0$ で実現する。この値や対応する状態は変換 (3.146) に対して不変ではない。そのため，この状態は変換 (3.146) 式により異なる状態になる。しかし系の対称性から，これらの状態は変換前の状態と同じエネルギーをもつ。だから，基底状態がエネルギー的に縮退していることになる。これは，零エネルギーの励起状態の存在を導く。これが，南部–Goldstone 定理である。

電流 j^a_μ が保存し，電荷が場を関係式

$$\partial^\mu j^a_\mu(x)=0 \tag{3.147}$$

$$Q^a=\int d^3x\, j^a_0(x) \tag{3.148}$$

$$[Q^a,\varphi_i(x)]=T^a_{ij}\varphi_j(x) \tag{3.149}$$

で変換するとしよう。さらにここで，基底状態が電荷 Q^a の固有状態ではなく，

$$\begin{aligned} Q^a|0\rangle &\neq 0 \\ \langle 0|Q^a &\neq 0 \end{aligned} \tag{3.150}$$

とする。すると，電流を含むグリーン関数，

$$\Gamma^a_{\mu i}(q)=\int dz\langle 0|T(j^a_\mu(z)\varphi_i(0))|0\rangle e^{iqz} \tag{3.151}$$

は

$$\begin{aligned} q^\mu\Gamma^a_{\mu i}(q) &= \int dz\langle 0|T(j^a_\mu(z)\varphi_i(0))|0\rangle(-i\partial_\mu)e^{iqz} \\ &= \int dz(i\partial_\mu)\langle 0|T(j^a_\mu(z)\varphi_i(0))|0\rangle e^{iqz} \\ &= \int dz(i)\langle 0|[j^a_0(z),\varphi_i(0)]|0\rangle e^{iqz} \\ &\to i\langle 0|[Q^a,\varphi_i(0)]|0\rangle \quad (q\to 0) \\ &= T^a_{ij}\langle 0|\varphi_j(0)|0\rangle = c^a_i \end{aligned} \tag{3.152}$$

となり，$q\to 0$ の極限で 0 にならない。ローレンツ不変性がある系では，$\Gamma^a_{\mu i}(q)$ はそのベクトル性から，

$$\Gamma^a_{\mu i}(q)=q_\mu F^a_i(q^2) \tag{3.153}$$

とおける。これを式 (3.152) に代入すると，

$$F^a_i(q^2)=\frac{c^a_i}{q^2} \tag{3.154}$$

となる。だから $\Gamma_\mu(q)$ は $q^2=0$ で 1 位の極をもつ関数となっている。

式 (3.151) の中間状態に完全系を代入して書き換えてみよう。

$$
\begin{aligned}
\Gamma^a_{\mu i}(q) &= \int dz \langle 0|T(j^a_\mu(z)\varphi_i(0))|0\rangle e^{iqz} \\
&= \int dz \left(\langle 0|j^a_\mu(z)|n\rangle\langle n|\varphi_i(0)|0\rangle\theta(z_0) + \langle 0|\varphi_i(0)|n\rangle\langle n|j^a_\mu(z)|0\rangle\theta(-z_0)e^{iqz}\right) \\
&= \int dz \sum_n \Bigg(\theta(z_0)e^{i(q+q_n)z}\langle 0|j^a_\mu(0)|n\rangle\langle n|\varphi_i(0)|0\rangle \\
&\qquad + \theta(-z_0)e^{i(q-q_n)z}\langle 0|\varphi_i(0)|n\rangle\langle n|j^a_\mu(0)|0\rangle\Bigg) \\
&= \sum_n \left(\frac{1}{q^0+q^0_n+i\epsilon}(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}_n)\langle 0|j^a_\mu(0)|n\rangle\langle n|\varphi_i(0)|0\rangle\right) \\
&\quad + \sum_n \left(\frac{1}{q^0-q^0_n-i\epsilon}(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_n)\langle 0|\varphi_i(0)|n\rangle\langle n|j^a_\mu(0)|0\rangle\right)
\end{aligned}
\tag{3.155}
$$

これが $q^2=0$ で 1 位の極をもつのは，零質量の粒子が状態 n に含まれているときである。だから，必ず零質量の粒子が存在し，破れた対称性に伴う電流と結合している。

3.8.2 複素スカラーモデル

次に，対称性の破れを複素スカラー場の理論で具体的に見てみる。複素場 $\varphi(x)$ が従うラグランジアンが

$$
L = \int d^3x(\partial_\mu\overline{\varphi}(x)\partial^\mu\varphi(x) - V[\varphi(x)]) \tag{3.156}
$$

で，$V[\varphi(x)]$ が，

$$
V = \lambda(\overline{\varphi}(x)\varphi(x) - c)^2 \tag{3.157}
$$

とする。明らかに場の位相変換，

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &\to e^{i\alpha}\varphi(x) \\
\overline{\varphi}(x) &\to e^{-i\alpha}\overline{\varphi}(x)
\end{aligned}
\tag{3.158}
$$

に対して L は不変である。無限小の変換に対しては，

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &\to (1+i\epsilon)\varphi(x) \\
\overline{\varphi}(x) &\to (1-i\epsilon)\overline{\varphi}(x)
\end{aligned}
\tag{3.159}
$$

となる。このため，電流

$$
\begin{aligned}
j_\mu(x) &= \overline{\varphi}(x)\partial_\mu\varphi(x) - \varphi(x)\partial_\mu\overline{\varphi}(x) \\
\partial^\mu j_\mu &= 0
\end{aligned}
\tag{3.160}
$$

は保存則を満たす。

V の性質は定数 c が正であるか負であるかで大きく異なる。

$c \leq 0$

V は $\varphi(x)=0$ で最小となる。

$c > 0$

V は $\varphi(x)=\sqrt{c}e^{i\beta}$ で最小となる。ここで β は任意な値をとることができ一意的に決まらない。場をこの値のまわりで,

$$\varphi(x)=(\sqrt{c}+\xi+i\zeta(x))e^{i\beta} \tag{3.161}$$

と展開しておく。これを V に代入し,

$$\begin{aligned} V &= \lambda((\sqrt{c}+\xi+i\zeta(x))(\sqrt{c}+\xi-i\zeta(x))-c)^2 \qquad (3.162)\\ &= \lambda(2\sqrt{c}\xi(x)+\xi(x)^2+\zeta(x)^2)^2 \\ &= \lambda(4c\xi(x)^2+4\sqrt{c}\xi(x)^3+4\sqrt{c}\xi(x)\zeta(x)^2+(\xi(x)^2+\zeta(x)^2)^2) \end{aligned}$$

を得る。$\xi(x)$ は質量 $2\sqrt{\lambda}c$ をもつが, 場 $\zeta(x)$ の 2 乗の項がないことより, $\zeta(x)$ は質量の値が 0 であることがわかる。また電流に場の展開式 (3.161) を代入すると,

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &= (\sqrt{c}+\xi(x)-i\zeta(x))\partial_\mu(\sqrt{c}+\xi(x)+i\zeta(x)) \\ &\quad -(\sqrt{c}+\xi(x)+i\zeta(x))\partial_\mu(\sqrt{c}+\xi(x)-i\zeta(x)) \\ &= 2i\sqrt{c}\partial_\mu\zeta(x)+2i\xi(x)\partial_\mu\zeta(x)-2i\zeta(x)\partial_\mu\xi(x) \qquad (3.163) \end{aligned}$$

となる。この結果より, 実際電流と零質量の場 $\zeta(x)$ が直接結合していることがわかる。

3.9 相互作用する系の分配関数

今までは, スカラー場の理論の量子論としての力学的性質に着目してきた。この節では, 少し方向を変えて多体系の統計的性質や熱力学的性質を調べる。一定の温度の下にあるスカラー粒子系の物理的性質を明らかにする。自由場の場合は, 簡単な計算ですむが, 相互作用する場の場合は計算は複雑になる。ここでは, 相互作用の効果を明らかにする。

相互作用は, 粒子に状態間の遷移を引き起こす。この遷移は, 粒子間の散乱として観測されることが多い。散乱振幅の定式化には, 相互作用表示が見通しがよい。相互作用表示では, 演算子はハミルトニアン H_0 に従い時間発展を行い, 状態は相互作用ハミルトニアン H_{int} に従い時間発展する。この節では, 同様な計算を経路積分に基づいて行う。経路積分では, 正準形式の量子化のよう

な表示の問題はない。しかし，相互作用項について展開する経路積分計算は，相互作用表示による摂動計算と等価な近似法である。

3.9.1　経路積分による分配関数の計算

スカラー場の量子系が有限の温度下で熱平衡にあるとしよう。このとき，物理量は個々の定常状態で決まるのではなく，定常状態の集合で決まる。物理量は，様々な平均値となっている。集合を決める各定常状態の重みは，状態のエネルギー値と温度で決まる。これらの平均量は，分配関数を使うことにより系統的に計算できる。分配関数が熱力学量を決めている。

分配関数 Z は，ボルツマン定数 k と温度 T から決まる $\beta = (kT)^{-1}$ とハミルトニアン H から

$$
\begin{aligned}
Z &= \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}) \\
&= \sum_n \langle n|(e^{-\beta H})|n\rangle
\end{aligned}
\tag{3.164}
$$

と定義される。Tr は正準形式の量子論では，完全系をはる状態の総和を意味する。この和の計算を，場の力学変数についての経路積分の形に書き換えることが可能である。本節では経路積分を使い分配関数の計算を行う。

分配関数は，ラグランジュ形式で時間を虚数とした作用と境界条件で決まる経路積分

$$
Z = \int \prod_x D\varphi(x) \mathrm{exp}\left(-\int_0^\beta d^4xL\right) \tag{3.165}
$$

$$
L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi(x))^2 + V[\varphi(x)] \tag{3.166}
$$

$$
\varphi(0, \boldsymbol{x}) = \varphi(\beta, \boldsymbol{x}) \tag{3.167}
$$

で表される。場に対する周期境界条件はボソン場に対する境界条件である。後で調べるフェルミ場は反周期境界条件を満たす。

上記の経路積分は，ラグランジアンが場の 2 次式であるときは，ガウス積分に帰着され簡単に求まる。しかしながら，相互作用がある系では，ラグランジアンは，場の 2 次式 L_0 と高次式 L_i の和 $L_0 + L_i$ となり，経路積分を解析的に計算することは困難である。このときは，高次の項を展開する摂動論が一つの計算方法である。摂動論では，指数関数を L_i について

$$
Z = \int \prod_x D\varphi(x) \exp\left[-\int_0^\beta d^4x(L_0 + L_i)\right] \tag{3.168}
$$

$$= \int \prod_x D\varphi(x) \exp\left[-\int_0^\beta d^4x L_0\right]\left[\sum_l \frac{1}{l!}\left(-\int_0^\beta d^4x L_i\right)^l\right]$$

のようにテイラー展開する。場についての高次項を展開した後では，ガウス積分を拡張することにより積分計算を遂行できる。

場の積分計算は，場の源 $j(x)$ をラグランジアンにつけ加えて式の変形を行い，最後に源 $j(x)$ を 0 にすることで簡単になる。すなわち，

$$\begin{aligned}
Z &= \int \prod_x D\varphi(x) \exp\left(-\int_0^\beta d^4x(L_0 + L_i)\right) \qquad (3.169)\\
&= \int \prod_x D\varphi(x) \exp\left(-\int_0^\beta d^4x\big(L_0 + j(x)\varphi(x)\big)\right)\\
&\quad \times \left(\sum_l \frac{1}{l!}\left(-\int_0^\beta d^4x L_i[\varphi(x)]\right)^l\right)\Bigg|_{j(x)=0}\\
&= \left[\left(\sum_l \frac{1}{l!}\left(-\int_0^\beta d^4x L_i\left[-\frac{\delta}{\delta j(x)}\right]\right)^l\right)\right.\\
&\quad \left.\times \int \prod_x D\varphi(x) \exp\left(-\int_0^\beta d^4x(L_0 + j(x)\varphi(x))\right)\right]\Bigg|_{j(x)=0}
\end{aligned}$$

と変形する。源 $j(x)$ は積分の変数とは関係ないので積分の前に出した。場の積分は本質的にガウス積分になるので，指数部を場について平方完成すれば後は簡単である。いまラグランジアン L_0 が

$$L_0 = \frac{1}{2}\varphi(x)\Delta\varphi(x) \qquad (3.170)$$

と書かれるとしよう。ここで Δ は微分や質量を含む演算子である。このとき，

$$\begin{aligned}
L_0 + j(x)\varphi(x) &= \frac{\varphi(x)\Delta\varphi(x)}{2} + j(x)\varphi(x) \qquad (3.171)\\
&= \frac{(\varphi(x) + j(x)(\Delta)^{-1})\Delta(\varphi(x) + (\Delta)^{-1}j(x))}{2} - \frac{j(x)(\Delta)^{-1}j(y)}{2}
\end{aligned}$$

と書けることより，分配関数はさらに，

$$\begin{aligned}
Z &= \left[\sum_l \frac{1}{l!}\left(-\int_0^\beta d^4x L_i\left[-\frac{\delta}{\delta j(x)}\right]\right)^l\right]\\
&\quad \times \int \prod_x D\varphi(x) \exp\left(-\int_0^\beta d^4x(L_0 + j(x)\varphi(x))\right)\Bigg|_{j(x)=0}
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_l \frac{1}{l!} \left(-\int_0^\beta d^4x L_i \left[-\frac{\delta}{\delta j(x)} \right] \right)^l \right)$$

$$\times \exp \left(\int_0^\beta d^4x d^4y \frac{1}{2} j(x) (\Delta)^{-1} j(y) \right) \Bigg|_{j(x)=0} N_0 \tag{3.172}$$

$$N_0 = \int \prod_x D\widetilde{\varphi}(x) \exp \left(-\int_0^\beta d^4x \frac{\widetilde{\varphi}(x) \Delta \widetilde{\varphi}(x)}{2} \right) \tag{3.173}$$

と書き換えれる。上式で定数 N_0 は，源に依存しないので，具体的な大きさがわかる必要はない。

以上で場の積分が実行できたことになる。残された仕事は，組合せに注意して $j(x)$ に関する関数微分を正しく行うことである。N_0 は単なる数係数である。この式から，相互作用から生じた汎関数微分と伝播関数だけで分配関数が書き表せる。この表式は相互作用表示における摂動展開における Wick の定理に対応している。

スカラー場の伝播関数

ここで 2 点グリーン関数 (伝播関数) $(\Delta)^{-1}(x-y)$ を計算しよう。

$$\Delta = -\partial_\mu{}^2 + m^2 \tag{3.174}$$

とする。

$$D^{(0)}(x-y) = (\Delta)^{-1}(x-y) \tag{3.175}$$

とおきフーリエ変換すると，

$$D^{(0)}(x-y) = \frac{1}{\beta} \Sigma_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ip(x-y)} D^{(0)}(p) \tag{3.176}$$

$$D^{(0)}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} \tag{3.177}$$

$$p^2 = p_0^{n\,2} + \boldsymbol{p}^2 \tag{3.178}$$

$$p_0^n = \frac{2\pi}{\beta} n \tag{3.179}$$

となる。2 点 x と y の伝播関数を，2 点を結ぶ直線 (図 3.4) で表すことにしよう。これを使い，分配関数を具体的に計算する。計算を見通しよく行うため，源に依存する分配関数を



図 3. 4 伝播関数

$$Z[j] = Ne^{-V(\frac{\delta}{\delta j})}e^{W_0[j]} \tag{3.180}$$

$$W_0[j] = \frac{1}{2}\int d^4xd^4y\, j(x)D^{(0)}(x-y)j(y) \tag{3.181}$$

と表す。

以下 $L_i(\phi) = \lambda\phi(x)^4$ の場合の計算を，結合定数 λ の次数ごとに行う。

まず $l=0$ の項は，

$$Z_0 = e^{W_0[j]}\Big|_{j(x)=0} = 1 \tag{3.182}$$

となる。

高次の項を計算するために，汎関数微分のいくつかの公式をまとめておく。

$$\frac{\delta}{\delta j(x)}j(y) = \delta^4(x-y) \tag{3.183}$$

$$e^{-W_0[j]}\frac{\delta}{\delta j(z)}e^{W_0[j]} = \frac{\delta W_0[j]}{\delta j(z)} \tag{3.184}$$

$$\begin{aligned} e^{-W_0[j]}\left(\frac{\delta}{\delta j(z)}\right)^n e^{W_0[j]} &= \left(e^{-W_0[j]}\frac{\delta}{\delta j(z)}e^{W_0[j]}\right)^n \\ &= \left(\frac{\delta W_0[j]}{\delta j(z)} + \frac{\delta}{\delta j(z)}\right)^n \end{aligned} \tag{3.185}$$

$W_0[j]$ の定義から

$$\frac{\delta W_0[j]}{\delta j(z)} = \int da_1 D^{(0)}(z-a_1)j(a_1) \tag{3.186}$$

$$\frac{\delta^2 W_0[j]}{\delta j(y)\delta j(z)} = D^{(0)}(z-y) \tag{3.187}$$

である。

次の $l=1$ の項は，

$$\begin{aligned} Z_1 &= \left(-\int_0^\beta d^4z L_i\left[-\frac{\delta}{\delta j(z)}\right]\right)e^{W_0[j]}\Big|_{j(x)=0} \\ &= -\int_0^\beta d^4z\lambda\left(\frac{-\delta}{\delta j(z)}\right)^4 e^{W_0[j]}\Big|_{j(x)=0} \\ &= -\int_0^\beta d^4z\lambda\Big(3\big(D^{(0)}(z-z)\big)^2 \\ &\qquad + 6\left(\int da_1 D^{(0)}(z-a_1)j(a_1)\right)^2 D^{(0)}(z-z)\Big)e^{W_0[j]}\Big|_{j(x)=0} \\ &\quad - \int_0^\beta d^4z\lambda\left(\int da_1 D^{(0)}(z-a_1)j(a_1)\right)^4 e^{W_0[j]}\Big|_{j(x)=0} \end{aligned} \tag{3.188}$$

$$= -\int_0^\beta d^4z\,\lambda\cdot 3(D^{(0)}(0))^2$$
$$= -\beta V\lambda\cdot 3\big(D^{(0)}(0)\big)^2$$

となる。ここで，V を空間の体積とした。また，

$$D^{(0)}(0) = \frac{1}{\beta}\sum_n \int d^3p \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{p^2+m^2} \tag{3.189}$$

で，$\beta \to \infty$ とし四次元運動量積分の上限を cutoff Λ とすると，(3.189) は Λ^2 で発散する量である。

汎関数微分の高次の具体的計算は，

$$\left(\frac{\delta}{\delta j(x)}\right) e^{W_0[j]} = \int da_1 D^{(0)}(x-a_1)j(a_1)e^{W_0[j]} \tag{3.190}$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta j(x)}\right)^2 e^{W_0[j]} = \left(D^{(0)}(0) + \left(\int da_1 D^{(0)}(x-a_1)j(a_1)\right)^2\right) e^{-W_0[j]} \tag{3.191}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta}{\delta j(x)}\right)^3 e^{W_0[j]} = \Bigg(3\int da_1 D^{(0)}(x-a_1)j(a_1)D^{(0)}(x-x) \\ + \left(\int da_1 D^{(0)}(x-a_1)j(a_1)\right)^3\Bigg)e^{W_0[j]}\end{aligned} \tag{3.192}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 e^{W_0[J]} = \Bigg(3(D^{(0)}(0))^2 + 6\left(\int da_1 D^{(0)}(x-a_1)j(a_1)\right)^2 D^{(0)}(0) \\ + \left(\int da_1 D^{(0)}(x-a_1)j(a_1)\right)^4\Bigg)e^{W_0[j]}\end{aligned} \tag{3.193}$$

などとなる。

次の $l=2$ の項は，

$$Z_2 = \frac{1}{2!}\left(-\int_0^\beta d^4z L_i\left[-\frac{\delta}{\delta j(z)}\right]\right)^2 e^{W_0[J]})\bigg|_{j(x)=0} \tag{3.194}$$

$$= \frac{1}{2!}(-)\int_0^\beta d^4z_1\lambda\left(\frac{-\delta}{\delta j(z_1)}\right)^4(-)\int_0^\beta d^4z_2\lambda\left(\frac{-\delta}{\delta j(z_2)}\right)^4 e^{W_0[J]}\bigg|_{j(x)=0}$$

$$= \frac{1}{2!}(\lambda)^2\int_0^\beta d^4z_1\int_0^\beta d^4z_2\left(\frac{-\delta}{\delta j(z_1)}\right)^4\left(\frac{-\delta}{\delta j(z_2)}\right)^4 e^{W_0[j]}\bigg|_{j(x)=0}$$

$$\begin{aligned}= \frac{1}{2!}(\lambda)^2\int_0^\beta d^4z_1\int_0^\beta d^4z_2(4!(D(z_1-z_2))^4 \\ +6\cdot 6\cdot 2(D(z_1-z_2))^2D(0)^2 + 3\cdot 3D(0)^4)\end{aligned}$$

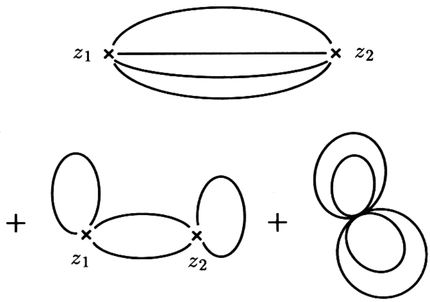


図 3.5　Z_2 のファインマン・ダイアグラム

となり，ダイアグラムで図 3.5 のように表せる。汎関数微分から，可能な組合せと組合せの数のすべてが自動的に考慮され計算される。これらすべては，ダイアグラムに対応させることができる。より高い次数の計算も同じ方法で行える。

次に 2 点関数について高次効果を計算してみよう。

$$
\begin{aligned}
D(x-y) &= \frac{1}{Z}\int \prod_z D\phi(z)\exp\left(-\int d^4 z L[\phi(z)]\right)\phi(x)\phi(y) \\
&= (-)\frac{\delta}{\delta j(x)}(-)\frac{\delta}{\delta j(y)}\left(-\int_0^\beta d^4 z L_i\left[-\frac{\delta}{\delta j(z)}\right]\right)^1 e^{W_0[j]}\bigg|_{j(x)=0} \\
&= -\int_0^\beta d^4 z\,\lambda\left(\frac{-\delta}{\delta j(z)}\right)^4(-)\frac{\delta}{\delta j(x)}(-)\frac{\delta}{\delta j(y)}e^{W_0[j]}\bigg|_{j(x)=0} \\
&= -\int_0^\beta d^4 z\,\lambda(-)\frac{\delta}{\delta j(x)}(-)\frac{\delta}{\delta j(y)} \\
&\quad\times\left(3(D^{(0)}(0))^2 + 6\left(\int da_1 D^{(0)}(z-a_1)J(a_1)\right)^2 D^{(0)}(0)\right. \\
&\quad\left.+\left(\int da_1 \Delta(z-a_1)j(a_1)\right)^4\right)e^{-W_0[j]}\bigg|_{j(x)=0} \\
&= -\int_0^\beta d^4 z\,\lambda\cdot 12D^{(0)}(z-x)D^{(0)}(z-y)D^{(0)}(z-z) \qquad (3.195)
\end{aligned}
$$

結果はやはりファインマンダイアグラムに対応している。λ^2 に比例する項も同様に計算できる。以上の計算では，最終的には源の項 $j(x)$ を 0 にする極限をとるため，源の項 $j(x)$ の積の数と源 $j(x)$ についての汎関数微分の数が等しいものだけが残る。この際，様々な組合せが可能である。また，計算結果には，積分運動量の上限を Λ としたとき，Λ^2 に比例する強い発散が現れる。これは，

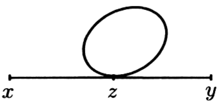


図 3.6 2 点関数

ϕ^4 のスカラー理論が後で述べるように繰り込み可能な理論ではあるが，裸の量を使い表したとき cutoff Λ の値に大きく依存するものであることを示す。後で述べる量子電気力学や量子色力学のゲージ理論では，対照的に Λ の対数発散しか現れない。4 点グリーン関数についても同様な計算を遂行することにより，相互作用の効果を調べることができる。やはり，Λ^2 の発散が現れる。強い発散が現れることは $\varphi(x)^4$ スカラー理論の特徴である。

相互作用が $\varphi(x)^3$ であるときは，少し異なる結果となる。分配関数

$$Z = \left(\sum_l \frac{1}{l!} \left(-\int_0^\beta d^4 z L_i \left[-\frac{\delta}{\delta j(z)} \right] \right)^l \right) e^{W_0[j]} \bigg|_{j(x)=0} \tag{3.196}$$

で

$$L_i(\phi) = \lambda' \phi(x)^3 \tag{3.197}$$

とすると，摂動論の 2 次の分配関数 Z_2 は，

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{1}{2!} \left(-\int_0^\beta d^4 z L_i \left[-\frac{\delta}{\delta j(z)} \right] \right)^2 e^{W_0[j]} \bigg|_{j(x)=0} \\ &= \frac{1}{2!}(-) \int_0^\beta d^4 z_1 \lambda' \left(\frac{-\delta}{\delta j(z_1)} \right)^3 (-) \int_0^\beta d^4 z_2 \lambda' \left(\frac{-\delta}{\delta j(z_2)} \right)^3 e^{W_0[j]} \bigg|_{j(x)=0} \\ &= \frac{1}{2!} \lambda'^2 (-) \int_0^\beta d^4 z_1 (-) \int_0^\beta d^4 z_2 \, 3! D^{(0)}(z_1 - z_2)^3 \end{aligned} \tag{3.198}$$

となる。これは，ダイアグラムで図 3.7 のように表せる。以上のように摂動論の計算は，伝播関数を線で表したファインマンダイアグラムで表すことが可能である。こうすることで，長い式を簡単な図で表し，見通しのよい形で計算を行える大きな利点がある。

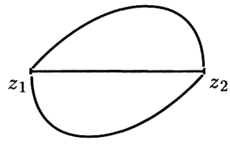


図 3.7 Z_2 のダイアグラム

3.9.2　分配関数と自由エネルギーの系統的な摂動計算

系統的に分配関数を求めるためには，場の源 $j(x)$ をラグランジアンにつけ加えて最後まで計算しておくと都合がよい。源がある系での分配関数 $Z[j]$ と自由エネルギー $W[j]$ を

$$Z[j] = \exp\left(W[j]\right) \tag{3.199}$$
$$= N\int\prod D\phi e^{-\int d^4x[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi(x))^2+\frac{1}{2}m^2\phi(x)^2+V(\phi)+j\phi]}$$

と定義する。$\phi(x)$ について 2 次式の積分は簡単に求まる。また自明な恒等式，

$$\phi(z)e^{-\int d^4xj(x)\phi(x)} = \frac{-\delta}{\delta j(z)}e^{-\int d^4xj(x)\phi(x)} \tag{3.200}$$

が成り立つ。これらを使うことにより，経路積分を場の源 $j(x)$ に関する汎関数として

$$Z[j] = Ne^{-V(-\frac{\delta}{\delta j})}e^{W_0[j]} \tag{3.201}$$

$$W_0[j] = -\frac{1}{2}\int d^4xd^4yj(x)D^{(0)}(x-y)j(y) \tag{3.202}$$

と表すことができる。式 (3.201) を

$$Z[j] = Ne^{W_0[j]}e^{-W_0[j]}e^{-V(-\frac{\delta}{\delta j})}e^{W_0[j]} \tag{3.203}$$

と表し，この対数をとることで，自由エネルギーは，

$$W[j] = -\log N + W_0[j] - \log\left(1+e^{-W_0}\left(e^{-V(-\frac{\delta}{\delta j})}-1\right)e^{W_0}\right) \tag{3.204}$$

と表せる。右辺の最後の項は，V が 0 であるときは 0 になる。つまり，結合定数 λ が 0 であるときに 0 になる。そのため，λ についてのべき展開の形で，

$$e^{-W_0}\left(e^{-V(-\frac{\delta}{\delta j})}-1\right)e^{W_0}$$
$$= \lambda\delta_1 + \lambda^2\delta_2 + \cdots + \lambda^l\delta_l + \cdots \tag{3.205}$$

と表すと見通しがよい。この展開式を使い，自由エネルギーを結合定数 λ のべきで展開し，

$$W[j] = -\log N + W_0[j] - \log\left(1+\lambda\delta_1+\lambda^2\delta_2+\cdots+\lambda^l\delta_l+\cdots\right)$$
$$= -\log N + W_0[j] - \lambda(\delta_1) - \lambda^2\left(\delta_2 - \frac{1}{2}\delta_1^2\right) - \lambda^3\left(\delta_3 - \delta_1\delta_2 + \frac{1}{3}\delta_1^3\right)$$
$$+\cdots \tag{3.206}$$

が得られる。この展開式で得られる λ の各べきの係数は特別な意味をもつ。これを具体的な計算で確認しよう。まず δ_1 を求める。式 (3.205) より，

$$\delta_1 = -e^{-W_0[j]}\left(\frac{-\delta}{\delta j(x)}\right)^4 e^{W_0[j]} \tag{3.207}$$

$$= -\left(\int da_i D^{(0)}(x,a_1)j(a_1)\right)^4 + 6D^{(0)}\left(\int D^{(0)}(x,a_1)j(a_1)\right)^2 + 3D^{(0)}(0)^2$$

となる。この式で，源の座標を a_i とし，場の座標を x とした。また，汎関数微分を繰り返し行った。

次に δ_2 を求めよう。式 (3.205) より，

$$\delta_2 = \frac{1}{2}e^{-W_0[j]}\left(\frac{-\delta}{\delta j(x)}\right)^4\left(\frac{-\delta}{\delta j(y)}\right)^4 e^{W_0[j]}$$

$$= \left(\delta_2^{(1)} + \delta_2^{(2)} + \delta_2^{(3)} + \delta_2^{(4)} + \delta_2^{(5)}\right) \tag{3.208}$$

$$\delta_2^{(1)} = \frac{1}{2}4!(D(x-y))^4 \tag{3.209}$$

$$\delta_2^{(2)} = \frac{1}{2}4\cdot 4!D(x-y)^3\int da_1 D^{(0)}(x,a_1)j(a_1)\int da_2 D(y,a_2)j(a_2) \tag{3.210}$$

$$\delta_2^{(3)} = \frac{1}{2}6\Bigg(6\cdot 2(D(x-y))^2 D(0) + 4\cdot 3(D(x-y))^2 \times\left(\int da_i D^{(0)}(x,a_1)j(a_1)\right)^2\Bigg)\left(D(0) + \int da_i D^{(0)}(x,a_1)j(a_1)\right)^2 \tag{3.211}$$

$$\delta_2^{(4)} = +\frac{1}{2}4\Bigg(6\cdot 2D(x-y)\int da_1 D(y-a_1)j(a_1)D(0) + 4\left(\int da_1 D(y-a_1)j(a_1)\right)^3 D(x-y)\Bigg) \times\left(3\left(\int da_1 D(x-a_1)j(a_1)\right)D(0) + \left(\int da_1 D(x-a_1)j(a_1)\right)^3\right) \tag{3.212}$$

$$\delta_2^{(5)} = \frac{1}{2}\Bigg(3D(0)^2 + 6\left(\int da_1 D(y-a_1)j(a_1)\right)^2 D(0) + \left(\int da_1 D(x-a_1)j(a_1)\right)^4\Bigg)\Bigg(3D(0)^2 + 6\left(\int da_1 D(x-a_1)j(a_1)\right)^2 D(0) + \left(\int da_1 D(x-a_1)j(a_1)\right)^4\Bigg) \tag{3.213}$$

となる。明らかに，

$$\delta_2^{(5)} = \frac{1}{2}\delta_1^2 \tag{3.214}$$

となっている。

有効作用

場に対する有効作用は自由エネルギーからルジャンドル変換して得られる。場は

$$\varphi_c(x) = \frac{-\partial}{\partial j(x)} W[j(x)] \tag{3.215}$$

と定義される。これより，有効作用は

$$\Gamma\big(\varphi_c(x)\big) = -W\big[j(x)\big] + \varphi_c(x)j(x) \tag{3.216}$$

である。有効作用は相互作用の効果を含んだ作用であり，最低次では古典的な作用に一致する。

3.10 N 体グリーン関数と繰り込み

3.10.1 運動量表示：零温度

様々な振幅がグリーン関数 $D^{(0)}(x,y)$ の積を座標で積分して得られる。この際，座標表示で計算するよりも運動量表示で計算するほうがやさしくなることが多い。これはグリーン関数 $D^{(0)}(x,y)$ は座標の複雑な関数であるが，フーリエ変換すると運動量の2次式の分数という簡単な関数になっていることによる。ここで，零温度 $\beta=\infty$ の場合を詳しく調べよう。

一般の N 点グリーン関数のフーリエ変換は，

$$(2\pi)^4\delta(p_1+p_2+\cdots+p_N)\widetilde{G}(p_1,p_2,\cdots,p_N) \tag{3.217}$$
$$= \int dx_1 dx_2\cdots dx_N G(x_1,x_2,\cdots,x_N)e^{-ip_1x_1-ip_2x_2-\cdots-ip_Nx_N}$$

$$G(x_1,x_2,\cdots,x_N) \tag{3.218}$$
$$= \frac{1}{Z}\int\prod_z D\phi(z)\exp\left(-\int d^4zL[\phi(z)]\right)\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_N)$$

となる。ここで左辺のデルタ関数は，グリーン関数が座標の平行移動に関する不変性をもつことによる。

2点関数

2点関数を座標表示から運動量表示にフーリエ変換して

$$(2\pi)^4\delta(p_1+p_2)\widetilde{D}(p_1) = \int dx_1dx_2G(x_1,x_2)e^{-ip_1x_1-ip_2x_2} \tag{3.219}$$

と得られる2点グリーン関数の連結部は，

$$\widetilde{D}(p) = \frac{1}{p^2+m^2} - 3(4\lambda)\frac{1}{(p^2+m^2)^2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2}$$

$$
\begin{aligned}
&+6(4\lambda)^2 \frac{1}{(p^2+m^2)^2} \int \frac{dq_1}{(2\pi)^4} \frac{dq_2}{(2\pi)^4} \frac{dq_3}{(2\pi)^4} \frac{(2\pi)^4 \delta(p-q_1-q_2-q_3)}{(q_1^2+m^2)(q_2^2+m^2)(q_3^2+m^2)} \\
&+9(4\lambda)^2 \frac{1}{(p^2+m^2)^2} \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2+m^2)} \int \frac{dl_1}{(2\pi)^4} \int \frac{dl_2}{(2\pi)^4} \frac{\delta(l_1-l_2)(2\pi)^4}{(l_1^2+m)(l^2+m^2)} \\
&+9(4\lambda)^2 \frac{1}{(p^2+m^2)^2} \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2+m^2)} \frac{1}{(p^2+m^2)} \int \frac{dl}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2+m)}
\end{aligned}
\tag{3.220}
$$

などの和となる (図 3.8)。

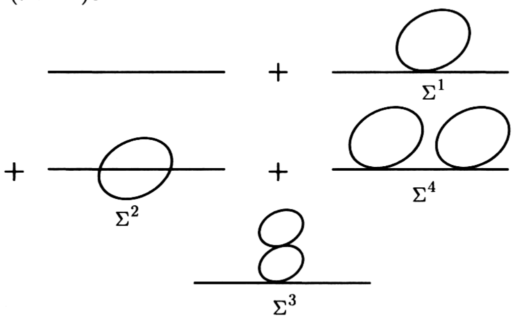


図 3.8 2 点グリーン関数の連結部

ここで,

$$\Sigma(p) = \Sigma^1(p) + \Sigma^2(p) + \Sigma^3(p) \tag{3.221}$$

$$\Sigma^1(p) = -3(4\lambda) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2+m^2} \tag{3.222}$$

$$\Sigma^2(p) = 6(4\lambda)^2 \int \frac{dq_1}{(2\pi)^4} \frac{dq_2}{(2\pi)^4} \frac{dq_3}{(2\pi)^4} \frac{(2\pi)^4 \delta(p-q_1-q_2-q_3)}{(q_1^2+m^2)(q_2^2+m^2)(q_3^2+m^2)} \tag{3.223}$$

$$\Sigma^3(p) = 9(4\lambda)^2 \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2+m^2)} \int \frac{dl_1}{(2\pi)^4} \int \frac{dl_2}{(2\pi)^4} \frac{\delta(l_1-l_2)(2\pi)^4}{(l_1^2+m)(l^2+m^2)} \tag{3.224}$$

$$\Sigma^4(p) = 9(4\lambda)^2 \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2+m^2)} \frac{1}{(p^2+m^2)} \int \frac{dl}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2+m)} \tag{3.225}$$

とおくと, $\Sigma(p)$ と $D^{(0)}(p)$ が繰り返される項は, 図 3.9 のようにちょうど等比級数の和となる。このためすべてを足した結果が,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{D}(p) &= \frac{1}{p^2+m^2}\left(1 + \frac{\Sigma(p)}{(p^2+m^2)} + \frac{\Sigma(p)}{(p^2+m^2)} \frac{\Sigma(p)}{(p^2+m^2)} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{p^2+m^2-\Sigma(p)}
\end{aligned}
\tag{3.226}
$$

とまとめられることがわかる。グリーン関数は, もともと波動方程式の逆演算

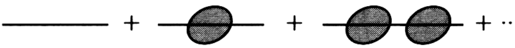


図 3.9 等比級数となる 2 点関数

子であった。これより，上記グリーン関数の振る舞いから，相互作用が働いたときの波動方程式は $-\Sigma(p)$ だけ修正されることがわかる。これより，グリーン関数が p^2 について 1 次の極をもつ質量の値は m からずれた別の値になることが多く，またグリーン関数の p^2 について 1 次の極の留数が 1 からずれることも多い。

ところで $\Sigma(p)$ で積分が発散することが容易にわかるであろう。$\Sigma(p)$ を外線の運動量 p についてテイラー展開して

$$\Sigma(p) = \Sigma(0) + p^2\Sigma'(0) + \widetilde{\Sigma}(p) \tag{3.227}$$

と表す。すると $\Sigma(0)$ や $\Sigma'(0)$ は発散するが，p_μ について 4 次以上の項 $\widetilde{\Sigma}(p)$ では，被積分関数は積分運動量について次数が下がり積分は収束する。このため，適当にパラメーターを選ぶと

$$p^2 + m^2 - \Sigma(p) = Z^{-1}(p^2 + m_{\text{phys}}^2) + \widetilde{\Sigma}(p)' \tag{3.228}$$

$$Z^{-1}m_{\text{phys}}^2 = -\Sigma(0) + m^2$$

$$Z = 1 + \Sigma'(0)$$

となる。ここで $\widetilde{\Sigma}(p)'$ は $p^2 + m_{\text{phys}}{}^2$ について 2 次以上の高次式とする。すると，相互作用のために伝播関数が，質量 $m_{\text{phys}}{}^2$，留数 Z の値をもつことになり，相互作用がないときの値からずれたものになる。場が相互作用している系では，質量に相互作用からの補正が現れるのは当然であろう。

ファインマンパラメーター積分

摂動論では 2 点関数の積を積分することになるので，運動量の積分は式 (3.220) のようないつも決まった形をしている。この積分を行う常套的な方法は，まず分数関数の積を一つの分数関数にまとめることである。このため，新たな積分変数を導入して関数の積を

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dxdy \frac{1}{(Ax + By)^2}\delta(1 - x - y) \tag{3.229}$$

$$\frac{1}{ABC} = 2!\int_0^1 dxdydz \frac{1}{(Ax + By + Cz)^3}\delta(1 - x - y - z) \tag{3.230}$$

と表す。この右辺の形に表しておくと，被積分関数は運動量について同次式としてまとめられ扱いやすくなる。一般の場合には，

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_N} = (N-1)! \int_0^1 dx_1 dx_2 \cdots dx_N \times \frac{1}{(A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_N x_N)^N} \delta(1 - \Sigma x_i) \quad (3.231)$$

$$\frac{1}{A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_N^{\alpha_N}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_N)} \int_0^1 dx_1 dx_2 \cdots dx_N \times \frac{\delta(1 - x_1 - \cdots - x_N) x_1^{\alpha_1 - 1} \cdots x_N^{\alpha_N - 1}}{(A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_N x_N)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_N}} \quad (3.232)$$

が成立する。これらの等式は右辺から始めて変形し左辺を導くことで証明できる。

発散積分：N 次元法

内線運動量の積分は外線の運動量 p^2 の関数である。これに着目して，式 (3.227) では，積分を p^2 で展開することにより発散項と有限項に分離した。これとは異なり，積分を直接発散項と有限項に分離する方法がある。その一つは，積分の次元を整数以外の値に解析接続する次元正則化の方法である。一般の N 次元では極座標は原点からの距離と $N-1$ 個の角度 $(l, \phi, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{N-2})$ を使う。体積要素と変数の領域は

$$d^N l = l^{N-1} dl d\phi \sin\theta_1 d\theta_1 \sin^2\theta_2 d\theta_2 \sin^3\theta_3 d\theta_3 \cdots \sin^{N-2}\theta_{N-2} d\theta_{N-2} \quad (3.233)$$

$$0 \le l \le \infty, \quad 0 \le \phi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta_i \le \pi \quad (3.234)$$

である。ファインマンダイアグラムの計算で N 次元運動量の積分

$$I_N = \int d^N l F(l^2) \quad (3.235)$$

$$= 2\pi \prod_{k=1}^{N-2} \int_0^\pi \sin^k \theta_k d\theta_k \int_0^\infty l^{N-1} F(l^2)$$

をさらにガンマ関数を使い表しておく。ガンマ関数に関する次の公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1} (\cos\theta)^{2y-1} d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (3.236)$$

$$\int_0^\pi (\sin\theta)^k d\theta = \frac{\Gamma((k+1)/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma((k+2)/2)} \quad (3.237)$$

$$\int_0^\infty dy y^{N/2-1} (1+y)^{-A} = \frac{\Gamma(N/2)\Gamma(A-N/2)}{\Gamma(A)} \quad (3.238)$$

を使うことにより，次元 N が整数と異なる任意の場合の I_N が求まる。これを使い，運動量積分が

$$\int d^N l \frac{1}{(l^2+a^2)^A} = \pi^{N/2}\frac{\Gamma(A-N/2)}{\Gamma(A)}\frac{1}{(a^2)^{A-N/2}} \tag{3.239}$$

$$\int d^N l \frac{1}{(l^2+2l\cdot p+b^2)^A} = \pi^{N/2}\frac{\Gamma(A-N/2)}{\Gamma(A)}\frac{1}{(b^2-p^2)^{A-N/2}} \tag{3.240}$$

$$\int d^N l \frac{l_\mu}{(l^2+2l\cdot p+b^2)^A} = \pi^{N/2}\frac{\Gamma(A-N/2)}{\Gamma(A)}\frac{-p_\mu}{(b^2-p^2)^{A-N/2}} \tag{3.241}$$

と求まる。ガンマ関数$\Gamma(z)$は$z=-n$で1位の極をもち他のzでは解析的である。だから，ガンマ関数により表示された関数はNが整数でない場合にも使える式である。極の近傍でガンマ関数は，

$$\Gamma(-n+\epsilon) = \frac{(-)^n}{n!}\left[\frac{1}{\epsilon}+\psi(n+1)+\frac{\epsilon}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}+\psi^2(n+1)-\psi'(n+1)\right)\right]+O(\epsilon) \tag{3.242}$$

$$\psi(n+1) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots-\gamma \tag{3.243}$$

$$\psi(s) = \frac{d}{ds}\ln\Gamma(s) \tag{3.244}$$

$$\psi'(n+1) = \frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}, \quad \psi'(1)=\frac{\pi^2}{6} \tag{3.245}$$

$$\psi(1) = -\gamma = -0.5772 \tag{3.246}$$

と振る舞う。そのため，積分結果はNについての1位の極と解析的な部分との和の形で書ける。4次元で発散したのは，極の部分である。

以上の方法を使い2点関数の自己エネルギー部$\Sigma(p)$を求めよう。第1項は

$$\begin{aligned}\Sigma^1(p) &= -3\lambda\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2}\\ &= -3\lambda\pi^{N/2}\frac{\Gamma(1-N/2)}{\Gamma(1)}\frac{1}{(m^2)^{1-N/2}}\end{aligned} \tag{3.247}$$

となり外線の運動量pによらない形で発散する定数である。次に，第2項

$$\begin{aligned}\Sigma^2(p) &= 6\lambda^2\int\frac{dq_1}{(2\pi)^4}\frac{dq_2}{(2\pi)^4}\frac{1}{(q_1^2+m^2)(q_2^2+m^2)((p-q_1-q_2)^2+m^2)}\\ &= \frac{6\lambda^2}{(2\pi)^8}2!\int_0^1 dxdy\int dq_1dq_2\\ &\quad\times\frac{1}{((1-x-y)(q_1^2+m^2)+y(q_2^2+m^2)+x((p-q_1-q_2)^2+m^2))^3}\end{aligned} \tag{3.248}$$

は外線の運動量に依存し発散する。第3項

$$\Sigma^3(p) = 9\lambda^2\int\frac{dq}{(2\pi)^4}\frac{1}{(q^2+m^2)}\int\frac{dl_1}{(2\pi)^4}\int\frac{dl_2}{(2\pi)^4}\frac{\delta(l_1-l_2)(2\pi)^4}{(l_1^2+m)(l_2^2+m^2)}$$

$$= 9\lambda^2 \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2+m^2)} \int \frac{dl_1}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_1^2+m)^2}$$
$$= \frac{9\lambda^2}{(2\pi)^8} \pi^N \frac{\Gamma(1-N/2)\Gamma(2-N/2)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} \frac{1}{(m^2)^{3-N}} \tag{3.249}$$

も発散する定数である。第 4 項

$$\Sigma^4(p) = 9\lambda^2 \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2+m^2)} \frac{1}{(p^2+m^2)} \int \frac{dl}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2+m)}$$
$$= 9\lambda^2 \frac{1}{(p^2+m^2)} \left(\int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2+m^2)} \right)^2$$
$$= \frac{1}{(p^2+m^2)} (\Sigma^1(p))^2 \tag{3.250}$$

は p に自明な形で依存する。$\Sigma^1(p)$ から $\Sigma^3(p)$ までの和を

$$\Sigma(p) = \Sigma(0) + p^2\Sigma'(0) + \widetilde{\Sigma}(p) \tag{3.251}$$

と表す。すると，$\Sigma(0)$ と $\Sigma'(0)$ は発散し，$\widetilde{\Sigma}(p)$ は収束する。

ところで，時空次元を 4 から N に変えたとき，結合定数の次元は四次元時空の場合とは異なる。N 次元で無次元の結合定数を定義するため，質量の次元をもつ適当な量 μ を導入して

$$\lambda_{\rm old} = \lambda_{\rm new}(\mu)^{2-\omega} \tag{3.252}$$

と表す。また場に関する作用積分も

$$S_\omega[\phi] = \int d^{2\omega}x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}(\mu^2)^{2-\omega}\phi^4 \right] \tag{3.253}$$

とする。

これらを使い，自己エネルギーは結合定数の 1 次のオーダーで

$$\frac{1}{2}(-\lambda)(\mu^2)^{2-\omega} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2+m^2)} \tag{3.254}$$
$$= -\frac{\lambda m^2}{2(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \Gamma(1-\omega)$$
$$= -\frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(\frac{1}{2-\omega} + \psi(2) - \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} + O(2-\omega) \right)$$

と，次元を表すパラメーターについて 1 位の極と解析的な部分に分解して表せる。

4 点関数

4 点グリーン関数に対する 2 次の高次補正項は，運動量積分

$$\frac{1}{2}(-\lambda)^2(\mu^2)^{4-2\omega} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{l^2+m^2} \frac{1}{[(l-p)^2+m^2]}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(\lambda)^2}{2}(\mu^2)^{4-2\omega}\int_0^1 dx \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[l^2+m^2-2lp(1-x)+p^2(1-x)]} \\
&= \frac{(\lambda)^2}{2}(\mu^2)^{4-2\omega}\int_0^1 dx \int \frac{d^{2\omega}l'}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{[l'^2+m^2+p^2x(1-x)]} \\
&= \frac{(\lambda)^2}{2}(\mu^2)^{4-2\omega}\int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\omega)}{(4\pi)^{\omega}} \frac{1}{[m^2+p^2x(1-x)]^{2-\omega}} \\
&= (\mu^2)^{4-2\omega}\frac{\lambda}{32\pi^2}\left[\frac{1}{2-\omega}+\psi(1)-\int_0^1 dx \ln\frac{m^2+p^2x(1-x)}{4\pi\mu^2}\right] \\
&= (\mu^2)^{4-2\omega}\frac{\lambda}{32\pi^2}\left[\frac{1}{2-\omega}+\psi(1)+2+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right. \\
&\qquad \left. -\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^2}}\ln\left(\frac{\sqrt{1+\frac{4m^2}{p^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{4m^2}{p^2}}-1}\right)+O(2-\omega)\right] \qquad (3.255)
\end{aligned}
$$

で1位の極と解析的な項に分離して表せる (図 3.10)。

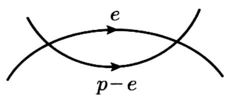


図 3. 10 4点関数

以上の計算から，相互作用の効果が伝播関数の極の位置と極における留数を自由場の値から変えてしまうことがわかる。また4点関数の大きさも変えてしまう。しかもこれらの値には発散が現れる。発散項は外線の運動量に依存しない定数である。そのため，2点関数の発散や4点関数の発散項は，作用積分 (3.253) と同じ形をしている。このように，相互作用の補正を受けた質量や結合定数を m や λ を使い表す際には発散がある。

3. 10. 2 繰り込み

ところで，上の発散は m や λ を使う際に現れるものである。ところが，m や λ は観測される質量や結合定数ではない。観測される質量や結合定数は相互作用の補正を受けたものである。発散の有無に関係なく，観測される質量や結合定数だけを使い他の物理量を表すことが物理的に必要である。さらにこの結果，発散がすべて観測される質量や結合定数に組み込まれてしまい，物理量には発散が全くないようになってしまうならば，理論的な予言をできることになる。このようになる場合には，一見計算で出てくる発散は質量や結合定数に吸

収され，これらを繰り込まれた値に置き換える操作で消失する。このとき，理論は繰り込み可能であるという。繰り込み可能な理論では，発散項がラグランジアンに含まれる項だけに限られている。そのため，発散項を取り去るのにラグランジアンで以下の分離を行うと簡単である。以下の式では，今までの m と λ のかわりに m_0 と λ_0 を使い，物理的に観測される質量と結合定数を m_{phys} と λ_{phys} と表す。

$$L^b = L + L_{c.t.} \tag{3.256}$$

$$L^b = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_0\partial_\mu\phi_0 + \frac{1}{2}m_0^2{\phi_0}^2 + \frac{\lambda_0}{4}(\mu^2)^{2-\omega}\phi_0^4 \tag{3.257}$$

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m_{\text{phys}}^2\phi^2 + \frac{\lambda_{\text{phys}}}{4}(\mu^2)^{2-\omega}\phi^4 \tag{3.258}$$

$$L_{c.t.} = \frac{1}{2}A\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m_{\text{phys}}^2B\phi^2 + \frac{\lambda_{\text{phys}}}{4}(\mu^2)^{2-\omega}C\phi^4 \tag{3.259}$$

ここで，

$$\phi_0 = (1+A)^{1/2}\phi = Z_\phi^{1/2}\phi \tag{3.260}$$

$$m_0^2 = m^2\frac{1+B}{1+A} = m^2(1+B)Z_\phi^{-1} \tag{3.261}$$

$$\lambda_0 = \lambda\mu^{2\epsilon}\frac{1+C}{(1+A)^2} = \lambda\mu^{2\epsilon}(1+C)Z_\phi^{-2} \tag{3.262}$$

とすることにより，質量が m_{phys} で，次元をもたない結合定数が λ となる。パラメーターは式 (3.229) と (3.255) の値から

$$A = \Sigma'(0), \quad B = \frac{1}{m_0^2}\Sigma(0) \tag{3.263}$$

$$C = \frac{\lambda}{32\pi^2}\frac{1}{\epsilon} \tag{3.264}$$

と決まる。これらから，繰り込まれたグリーン関数 $\Gamma^{(n)}$ が

$$\Gamma_0^{(n)}(p_1, p_2, \cdots, p_n, \epsilon) = Z_\phi^{-n/2}\Gamma^{(n)}(p_1, p_2, \cdots, p_n; \lambda, m, \mu, \epsilon) \tag{3.265}$$

と計算される。ϵ を 0 とする極限で，繰り込まれたグリーン関数 $\Gamma^{(n)}(p_1, p_2, \cdots, p_n; \lambda, m, \mu, \epsilon)$ は有限である。λ や m を使い表した $\Gamma^{(n)}(p_1, p_2, \cdots, p_n; \lambda, m, \mu, \epsilon)$ は理論から一意的に計算され，予言能力をもつものである。しかし結合定数 λ や質量 m を計算で求めることは，通常の枠組みではできないので，実験値を代入することになる。これら結合定数や質量を計算で求めるためには，新たな原理が必要である。

発散の次数

一般のダイアグラムの発散の次数を見積もっておこう。V 個の相互作用 vertex, E 個の外線, I 個の内線からなるダイアグラムで, 積分は

$$\int \prod_{i=1}^{I} \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \prod_{j=1}^{V} \delta(\Sigma q_l) \prod_{k=1}^{I} \frac{1}{q_m^2 + q'^2 + c^2} \tag{3.266}$$

の形をしている。そのため, 積分の次数 D は積分変数の数, デルタ関数の数, 分母の数から

$$D = dI - d(V-1) - 2I \tag{3.267}$$

と決まる。ただしここでデルタ関数の数で一つは外線だけのものになることを使った。また各 vertex から 4 本出ている線は二つの vertex を結ぶ内線か外線になることから

$$4V = E + 2I \tag{3.268}$$

なる関係式を満たしている。これを代入して,

$$D = d - \frac{1}{2}(d-2)E + V\left(\frac{4-2}{2}d - 4\right) \tag{3.269}$$

となり, さらに $d = 4$ を代入すると D は

$$D = 4 - E \tag{3.270}$$

となる。つまり発散の次数は外線の数で決まる。D が正か 0 になるのは, $E = 0$, $E = 2$, $E = 4$ の場合に限られる。$E = 0$ は外線が全くない場合で真空のエネルギーが発散することを意味し, $E = 2$ は 2 個の外線がある 2 点関数の自己エネルギーが発散することを意味し, $E = 4$ は 4 本の外線をもつ場合で $\phi(x)^4$ の相互作用の結合定数が発散することを意味する。これらの発散は物理量が発散するのではなく, 出発点にある質量, 結合定数を使う表し方がよくないことを意味している。だから, $E = 0$ の発散は真空のエネルギーの位置を 0 とみなすことで取り除け, $E = 2$ の発散は質量と場の大きさを調節することで取り除ける。最後の $E = 4$ の発散は $\phi(x)^4$ の相互作用の結合定数を定義し直すことで取り除ける。

有限温度効果

以上の主な計算は零温度で行った。これらを有限温度で行うには,

$$\sum_n f(p_0^n) = \frac{1}{2\pi} \int dp_0 \frac{f(p_0)}{1 - e^{ip_0}} \tag{3.271}$$

とまず和を複素積分に表し, 計算が行える。

3.11　ソリトンと集団座標

ラグランジアン L を停留的とする古典場の近傍における微小振動の量子論が，粒子の多体問題を表し，この古典場が対称性を破る場合には，零質量の粒子が存在することをみた。では，ラグランジアン L を停留的にする古典場で，時空座標の関数となるものがあるだろうか?　この古典場近傍での微小振動はどのようになるだろうか?　時空座標の関数は，時空の平行移動により別の解に変わる。だから，この古典場のまわりで展開して構成される量子論では，時空の平行移動に対する不変性を破るように見える。しかし，集団座標を取り入れて表すことにより，時空の対称性を破らない理論が構成される。

空間座標に依存し，時間によらない有限のエネルギーをもつ場をソリトンという。ソリトンはエネルギーが空間的に局在して粒子的な性質をもつ非線形波動である。様々な物理系でソリトンが見つかっているが，ここでは簡単なスカラー場を調べる。また時空に依存する有限の作用をもつ場をインスタントンという。インスタントンは後で考察する非可換ゲージ理論で重要な働きをしている。まずスカラー場の理論でソリトンを考える。

ラグランジアン L が $\varphi(x)=\varphi_c(x)$ で停留的になるのは，

$$\delta L = 0 \tag{3.272}$$

を満たすときであり，この条件はさらに

$$\begin{aligned}\delta L &= L[\varphi^{(c)}(x)+\delta\varphi(x)] - L[\varphi^{(c)}(x)] \\ &= \int dx\delta\varphi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}L\bigg|_{\varphi(x)=\varphi^{(c)}} + \delta\partial_\mu\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}L\bigg|_{\varphi(x)=\varphi^{(c)}} \\ &= \int dx\delta\varphi(x)\left(\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}L\bigg|_{\varphi(x)=\varphi^{(c)}} - \partial_\mu\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}L\bigg|_{\varphi(x)=\varphi^{(c)}}\right) + \text{表面項}\end{aligned} \tag{3.273}$$

となる。つまり，$\varphi^{(c)}(x)$ はオイラー・ラグランジュの方程式を満たすことになる。

時空 2 次元での中性スカラー場の理論

ラグランジアンが，

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi(x))^2 - V \tag{3.274}$$

$$V = \lambda(\varphi(x)^2 - c)^2 \tag{3.275}$$

となる理論を考察する。ここで，c と λ は正の数であるとする。オイラー・ラグランジュの方程式は，

$$\partial_\mu{}^2\varphi(x) = 4\lambda(\varphi(x)^2 - c)\varphi(x) \tag{3.276}$$

であり,

$$\varphi(x) = \pm\sqrt{c} \tag{3.277}$$

が時空座標に依存しない解であり通常の基底状態に対応する。V がもつ対称性

$$L[-\varphi(x)] = L[\varphi(x)] \tag{3.278}$$

を反映して，二つの縮退した解が存在する。

次に，空間座標に依存した解を求めよう。エネルギーが有限になるためには，$x \to \pm\infty$ で $\pm\sqrt{c}$ となる必要がある。空間依存性をもつとき，場が従う方程式は

$$-\partial_1{}^2\varphi(x) = 4\lambda(\varphi(x)^2 - c)\varphi(x) \tag{3.279}$$

となる。両辺に $\partial_1\varphi(x)$ をかけて,

$$-\partial_1\varphi(x)\partial_1{}^2\varphi(x) = 4\lambda(\varphi(x)^2 - c)\varphi(x)\partial_1\varphi(x) \tag{3.280}$$

を得，さらにこれを積分して,

$$-\frac{1}{2}\partial_1\varphi(x)^2 = \lambda(\varphi(x)^2 - c)^2 - D \tag{3.281}$$

を得る。これは，ちょうど質点の運動方程式を積分して解くのと同じ方法であり，D は積分定数である。自変数を逆にして，空間座標 x を φ の関数であるとして解くと

$$\frac{dx}{d\varphi} = (2(D + \lambda(\varphi^2 - c)^2))^{-1/2} \tag{3.282}$$

となる。さらにこれを積分する。

$$x = \int d\varphi \frac{1}{\sqrt{2(D + \lambda(\varphi^2 - c)^2)}} \tag{3.283}$$

この積分は楕円積分で表せる。この解のエネルギーが有限になるためには，$x \to \pm\infty$ で $\varphi^2 = c$ となることが必要である。この場合 $D = 0$ であり，積分が簡単に求まる。

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int d\varphi \frac{1}{\varphi^2 - c} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2c\lambda}} \tanh^{-1} \frac{\varphi}{\sqrt{c}} - x_0 \end{aligned} \tag{3.284}$$

よって,

$$\varphi(x)_c = \sqrt{c}\tanh(\sqrt{2c\lambda})(x + x_0) \tag{3.285}$$

となる。これをキンクとよび $\varphi(x)_{古典解}$ とおく。これをグラフに描いたのが図 3.11 である。

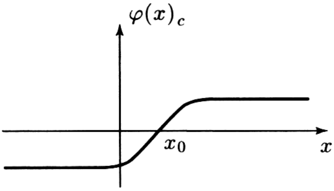


図 3.11 キンク解

$x \to \infty$ で $\varphi(x)_{古典解} = \sqrt{c}$ となり，$x \to -\infty$ で $\varphi(x)_{古典解} = -\sqrt{c}$ となっている。$x = \pm\infty$ では通常の真空の値に一致するため，この領域ではエネルギー密度が 0 になる。エネルギー密度の空間分布は図 3.12 となり，有限の空間領域でだけ値をもつ。このため，キンクは粒子のように振る舞う。

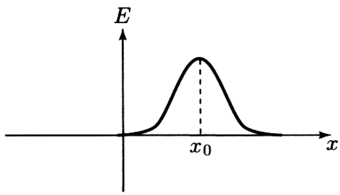


図 3.12 キンクのエネルギー密度

キンクはまた特殊な電荷

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x \varphi(x) \tag{3.286}$$

が $2\sqrt{c}$ となっている状態である。この電荷は，通常のネーターの定理からの保存電荷とは性質を異にし，ラグランジアンの連続的対称性を反映しているわけではない。この電荷は，φ を微小に変形しても変わらない特異な性質をもつ。場が座標の関数として連続で微分可能であるとき，電流

$$j_\mu(x) = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \varphi(x) \tag{3.287}$$

は必ず保存し，トポロジカルな起源をもつ保存電流である。 通常の真空では $x \to +\infty$ と $x \to -\infty$ で関数の値が一致するためこの電荷は 0 である。この電荷が 0 でない状態は電荷が 0 である状態には遷移しない。このため，この古典解で表せる状態はトポロジカルな理由で安定である。

次にこの古典解の近傍での場の微小振動がどのようになるか調べる。そのため，場を

$$\varphi(x) = \varphi(x)_{古典解} + \xi(x) \tag{3.288}$$

とおいてラグランジアンに代入し微小振動 $\xi(x)$ の性質を調べる。すると,

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}(\partial_\mu(\varphi(x)_{古典解} + \xi(x)))^2 - \lambda((\varphi(x)_{古典解} + \xi(x))^2 - c)^2 \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu(\varphi(x)_{古典解})^2 - \lambda((\varphi(x)_{古典解})^2 - c)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi(x))^2 \\
&\quad - \lambda((\varphi(x)_{古典解} + \xi(x))^2 - c)^2 \\
&= L_{古典解} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi(x))^2 - \lambda(6\varphi(x)^2_{古典解} - 2c)\xi(x)^2 \\
&\quad - 4\lambda\varphi(x)_{古典解}\xi(x)^3 - \lambda\xi(x)^4
\end{aligned}
\tag{3.289}
$$

となる。この式で場 $\xi(x)$ について 1 次の項は,古典場 $\varphi(x)_{古典解}$ がオイラー・ラグランジュの方程式を満たしていることから打ち消された。また古典解が座標の関数であることを反映して場 $\xi(x)$ について 2 次の項は,座標に依存する関数である。そのため,2 次の項を対角形にする固有関数は平面波ではなく,固有値は自由場の場合の値とは異なる。今の場合,固有値問題は特殊なポテンシャル中での問題となり,束縛状態に対応する不連続な固有値と散乱状態に対応する連続な固有値の両方が存在する。これらの固有値や固有解を具体的に求めることができる。固有値方程式は,

$$
[-\partial_1{}^2 + \lambda(6\varphi(x)_{古典解}{}^2 - 2c)]f_n(x) = E_n f_n(x) \tag{3.290}
$$

となり,古典解を代入すると,方程式の解が

$$
f_0 = \frac{1}{\cosh^2(\sqrt{2c\lambda}\sigma)};\ E_0 = 0 \tag{3.291}
$$

$$
f_1 = \frac{\sinh(\sqrt{2c\lambda}\sigma)}{\cosh^2(\sqrt{2c\lambda}\sigma)};\ E_1 = \sqrt{6c\lambda} \tag{3.292}
$$

$$
f_n = e^{ik\sigma}\left(3\tanh^2(\sqrt{2c\lambda}\sigma) - i\,3k\frac{\sqrt{2}}{\mu} - 1 - \frac{2k^2}{\mu^2}\right);\ E_n = \sqrt{2\mu^2 + k^2} \tag{3.293}
$$

と求まる。関数 $f_0(\sigma)$ と $f_1(\sigma)$ は実数関数であるが $f_n(\sigma)$ $(n \geq 2)$ は複素関数である。また,$f_0(\sigma)$ と $f_n(\sigma)$ $(n \geq 2)$ の実数部は σ についての偶関数であり $f_1(\sigma)$ と $f_n(\sigma)$ $(n \geq 2)$ の虚数部は奇関数である。これらを $g_n(\sigma)$ とおくと,直交性の条件,

$$
(g_l, g_{l'}) = \delta_{ll'} \tag{3.294}
$$

を満たしている。エネルギーが不連続である束縛状態が 2 個あり,他は散乱状態である。束縛状態のうち,一つは厳密にエネルギーが 0 であり,$f_0(\sigma) = \frac{\partial}{\partial\sigma}\varphi_{古典解}$ である。零エネルギー解は,平行移動対称性から必然的に生じている。零エネルギー固有解が存在する理由は,古典解がラグランジアンのもつ平行移動に対

する対称性を破るからであり，南部・ゴールドストーンの零エネルギー励起に対応するものである。このモードは系の対称性を表現する際，いくつかの重要な帰結を導く。これらについては後で詳しく調べる。

さて，$\xi(x)$ 場を直交完全系 (f_n) で，

$$\xi(x) = \sum_l a_l(t) f_l(\boldsymbol{x}) \tag{3.295}$$

と展開しラグランジアンに代入しよう。係数 $a_l(t)$ は時間に依存する力学変数であり，ラグランジアン

$$\begin{aligned} L &= \int dx L[\varphi(x)_{古典解} + \xi(x)] \qquad (3.296) \\ &= L_{古典解} + \sum_l \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} a_l(t) \right)^2 - E_l(a_l(t))^2 + O(a^3, a^4) \right) \end{aligned}$$

で運動が決まる。二つある束縛状態の波動関数はキンクの中心近傍でだけ値をもつ。零エネルギーの第一励起状態はキンク解を空間微分した波動関数で表せ，キンクの運動を表すモードである。このため，質量には寄与しない。次の第二励起状態は，キンクの励起を表し，励起状態の質量は基底状態の質量よりも E_1 だけ大きくなっている。

相対論的な集団座標[1)]

考察しているスカラー場の理論の系は，時空の平行移動と回転やローレンツ変換の両方を含む変換群であるポアンカレ変換に対して不変である。そのため，前節で見たように変換の代数を満たす生成演算子が存在する。ベクトル空間はこの変換群の表現空間を形成している。キンク解はこの不変性を破るが，零エネルギーのモードが不変性を回復する働きをする。この事情を統一的に理解するには，ポアンカレ変換に対応した座標であり，キンク解の集団的な運動を記述する集団座標 a_μ, b_μ^r を導入して力学を表すのが見通しよい。これは時空に固定した座標系と異なるキンクに固定した座標系を新たにつくり，座標系に対応する変数を導入して系を記述することに対応する。そのため，元の時空座標を，

$$\begin{aligned} x_\mu &= a_\mu(\tau) + \sum_r b_\mu^r(\tau)\sigma_r \qquad (3.297) \\ b_\mu^r(\tau) b^{\mu s} &= -\delta^{rs} \end{aligned}$$

と表す。ポアンカレ変換は

---

1)　K. Ishikawa, Nucl.Phys. **B107**, 238-252; 253-261(1976); Prog. Theor. Phys. **58**, 1283-1298(1977).

$$\begin{aligned} a_\mu(\tau) &\to a_\mu(\tau) + c_\mu \\ a_\mu(\tau) &\to \Lambda_{\mu,\nu} a^\nu(\tau) \\ b_\mu^r(\tau) &\to \Lambda_{\mu,\nu} b^{\nu,r}(\tau) \end{aligned} \tag{3.298}$$

と表現される。だから，新たに導入した変数を使うことにより系のポアンカレ変換に対する性質は見やすくなる。力学を展開する際，x_0 ではなく τ を時間として扱い正準形式を展開する。

作用積分をこれらの変数で表そう。

$$\begin{aligned} S &= \int dx_0 dx L(\varphi, \partial\varphi) \\ &= \int d\tau d\boldsymbol{\sigma} \frac{\partial(x_0, \boldsymbol{x})}{\partial(\tau, \boldsymbol{\sigma})} L'(\varphi, \partial\varphi) \end{aligned} \tag{3.299}$$

ただし，

$$\widetilde{\varphi}(\tau, \sigma) = \varphi(x) \tag{3.300}$$

$$\partial_\mu \varphi(x) = \frac{\delta\tau}{\delta x_\mu}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\tau} + \frac{\delta\sigma_r}{\delta x_\mu}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\sigma_r} \tag{3.301}$$

である。時空 2 次元の場合には，

$$b_0(\tau) = \sinh\theta(\tau) \tag{3.302}$$

$$b_1(\tau) = \cosh\theta(\tau) \tag{3.303}$$

とおけばよい。さて座標系を表す新たな自由度を取り込んで作用を具体的に書き換えてみよう。

$$S = \int d\tau L \tag{3.304}$$

$$L = \int d\sigma h \left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{h}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\tau} - \frac{1}{h}(\cosh\theta\dot{a}_1 - \sinh\theta\dot{a}_0)\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\sigma}\right\}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\sigma}\right)^2 - V(\widetilde{\varphi})\right] \tag{3.305}$$

$$h = \cosh\theta\dot{a}_0 - \sinh\theta\dot{a}_1 + \dot{\theta}\sigma \tag{3.306}$$

次に変数に正準共役な量を求める。いつものようにラグランジアンを速度で微分して運動量が得られる。新たな座標に共役な運動量は，

$$P_0(\tau) = -\cosh\theta\int d\sigma T_{00} - \sinh\theta\int d\sigma T_{01} \tag{3.307}$$

$$P_1(\tau) = -\sinh\theta\int d\sigma T_{00} - \cosh\theta\int d\sigma T_{01} \tag{3.308}$$

$$W(\tau) = \frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}L = -\int d\sigma\sigma T_{00} \tag{3.309}$$

$$T_{00} = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{D\widetilde{\varphi}}{D\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\sigma}\right) + V(\widetilde{\varphi})\right) \tag{3.310}$$

$$T_{01} = \frac{D\widetilde{\varphi}}{D\tau}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\sigma} \tag{3.311}$$

となる。また場に共役な運動量は,

$$\pi(\tau,\sigma) = \frac{\partial}{\partial\dot{\widetilde{\varphi}}}L = \frac{D\widetilde{\varphi}}{D\tau} = \frac{1}{h}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\tau} - \frac{1}{h}(\cosh\theta\dot{a}_1 - \sinh\theta\dot{a}_0)\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\sigma} \tag{3.312}$$

となる。これらは交換関係,

$$[a_\mu, P_\nu] = ig_{\mu\nu} \tag{3.313}$$

$$[\theta, \omega] = i \tag{3.314}$$

$$[\widetilde{\varphi}(\tau,\sigma), \pi(\tau',\sigma')]\delta(\tau-\tau') = i\delta(\sigma-\sigma')\delta(\tau-\tau') \tag{3.315}$$

を満たしている。ハミルトニアンは,

$$H = \dot{a}_\mu P^\mu + \dot{\theta}\omega + \int d\sigma\dot{\widetilde{\varphi}}\pi - L = 0 \tag{3.316}$$

と 0 となる。このように時間を力学変数として扱うときは, 時間のスケールを決めない。そのためいつもハミルトニアンは 0 になる。ゲージ固定すると, 0 ではないハミルトニアンが現れる。

得られた正準共役量は互いに独立ではなく, 束縛条件

$$\Phi_1 = P_0 + \cosh\theta\int d\sigma(T_{00}) + \sinh\int d\sigma(T_{01}) = 0 \tag{3.317}$$

$$\Phi_2 = P_1 + \sinh\theta\int d\sigma(T_{00}) + \cosh\int d\sigma(T_{01}) = 0 \tag{3.318}$$

$$\Phi_3 = \omega + \int d\sigma\sigma(T_{00}) = 0 \tag{3.319}$$

を満たす。さらにこれらの束縛条件は,

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = \{\Phi_2, \Phi_3\} = \{\Phi_3, \Phi_1\} = 0 \tag{3.320}$$

を満たしている。だからゲージ理論と同種の力学系である。3 個の対応するゲージ固定条件を課すことにより余分な変数を消去できる。ゲージ固定条件をどのように選んでも, 物理は本質的に変わらないはずである。しかし, うまいゲージ固定の選び方で計算の見通しがよくなる。今の場合,

$$X_1 = a_0 - a_1\tanh\theta - \tau \tag{3.321}$$

$$X_2 = \int d\sigma\widetilde{\varphi}(\sigma)f_0(\sigma) \tag{3.322}$$

$$X_3 = P_1 - P_0\tanh\theta \tag{3.323}$$

ととると都合がよい。$X_3=0$ より運動量やエネルギーの固有値に対しては θ が rapidity である。また $X_1=0$ より，時間 τ はローレンツ収縮の影響を受けた時間であることを意味する。$X_2=0$ より，場 $\widetilde{\varphi}(\sigma)$ がキンクの零エネルギー運動モード f_0 とは直交していること，すなわちキンクは座標系に静止していることを示す。

場に共役な π は $\widetilde{\varphi}(\sigma)$ とは異なり，キンクの運動モードと直交しているわけではない。キンクと直交したモードで表すため，変数変換を行う。

$$\pi=-f_0(\sigma)\frac{\int d\sigma\widetilde{\pi}(\sigma)(\widetilde{\varphi}'(\sigma)-f_0(\sigma))}{\int d\sigma f_0(\sigma)\widetilde{\varphi}'(\sigma)}+\widetilde{\pi} \tag{3.324}$$

すると，

$$\Phi_2=\int d\sigma\widetilde{\pi}(\sigma)f_0=0 \tag{3.325}$$

となる。これは $\widetilde{\pi}$ がキンクの運動と直交することを表す。$X_2=0$ と $\Phi_2=0$ から場の変数が完全にキンクの運動と分離することがわかる。だから，キンクは座標系に静止している。よって，キンクの質量は，

$$\int d\sigma m(\widetilde{\pi},\widetilde{\varphi})=\int d\sigma\left(\frac{1}{2}\widetilde{\varphi}^2+(f_0(\sigma))^2\left(\frac{\int d\sigma\widetilde{\pi}}{\int d\sigma f_0\widetilde{\varphi}}\right)^2+\frac{1}{2}(\partial\widetilde{\varphi})^2+V(\widetilde{\varphi})\right) \tag{3.326}$$

で与えられる。以上は2次元の集団座標を扱った。時空3次元や4次元に拡張することは，簡単である。

問題 3

3.1 spacelike な関係にある2つの時空座標 x と x' では，積分変数を変換することにより以下の関係式が導かれることを示せ。

$$\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\boldsymbol{p})}\exp(ip_\mu\cdot(x-x')^\mu)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\boldsymbol{p})}\exp(-ip_\mu\cdot(x-x')^\mu)$$

3.2 $m^2<0$ であるとき，交換関係が0にならないで現象が関係し合う領域は，$m^2>0$ である場合と異なる。どのように異なるか？

3.3 座標の回転やローレンツ変換に対する生成子が Schwinger の変分原理の考えで得られることを示せ。

3.4 代数 (3.119) から，場からなる電荷がリー代数 (3.127) を満たすことを示せ。

3.5 束縛条件が満たす関係式 (3.320) を証明せよ。

3.6 2次元サインゴードン方程式の古典解を求めよ。

3.7 時空 4 次元における集団座標 a_μ, b_μ^σ を力学変数として扱う場合の拘束条件を求め，代数が閉じていることを示せ。

3.8 積分 (3.248) を次元法で実行し，スカラー場の繰り込みの係数 Z を求めよ。

4章　電磁場と光子

電場が時間とともに変化すると磁場が生じ，磁場が時間とともに変化すると電場が生じる。これらをまとめたマックスウェル方程式は，時間や空間についての 1 階の連立偏微分方程式である。静的な電磁場は電磁気力の起源であったが，場が時間的に振動すると新たに電磁波が生成され伝播する。その方程式は，時間について 2 階のニュートンの運動方程式とは異なる性質をもっている。しかし，ベクトルポテンシャルを導入して書き直すと，マックスウェル方程式はニュートンの運動方程式と同等な 2 階の波動方程式になる。この方程式は，相対論的に不変な零質量のスカラー場が従う方程式と等価である。だから，電磁場はベクトルポテンシャルを使うことによりスカラー場と同様に量子化される。前章で見たように，場の力学系は調和振動子の集まった系とみなせ，電磁場も調和振動子と同等の形で量子化される。ベクトルポテンシャルはスカラー場と同じに，座標表示よりもフーリエ展開して得られる運動量表示でより簡単になる。運動量表示では，ハミルトニアンは光子の生成や消滅に対応する生成演算子や消滅演算子で対角形になる。

電場や磁場のかわりにベクトルポテンシャルを使う際，電場や磁場とベクトルポテンシャルが一対一に対応するわけではないことに注意が必要である。一つのベクトルポテンシャルは一つの電場や磁場を与えるが，逆に一つの電場や磁場が一つのベクトルポテンシャルを決めるわけではない。たとえば，ベクトルポテンシャルを一つの関数 $\lambda(x)$ で

$$A_\mu(x) \to A_\mu + \partial_\mu \lambda(x) \tag{4.1}$$

とゲージ変換したとき，明らかにベクトルポテンシャルは変わるが，電場や磁場は

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x) \rightarrow \partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x) \tag{4.2}$$

と変わらない。このため，$F_{\mu\nu}$ で書かれた理論はゲージ不変性をもつ。ゲージ不変な理論では，正準変数が拘束条件をもち，一部の変数は独立ではない。拘束条件が伴うことより，ベクトルポテンシャルにより電場や磁場を量子化することは，単純な調和振動子よりも複雑である。しかし，正準形式で力学を表現しておくと，通常の力学と同じで量子化が見通しよく行える。そのため，本章でも正準形式に則って量子論を展開する。

量子論は複素ベクトル空間で定式化される。エルミート演算子で様々な物理量が表せ，ベクトルで様々な量子状態が構成される。これらの量子状態には，単純な光子以外に近年様々な状態が実際につくられ調べられている。それらの状態が，応用されまた量子力学の基本的なテストに使われている。

真空中の電磁場の量子化と様々な量子状態の構成をまず行い，引き続き，これらの状態の性質を調べる。絶縁体中の電磁場を次に扱う。絶縁体は真空とは異なる誘電率や透磁率をもつ。さらに，時空の反転に関する対称性と反転対称性の破れの扱いと，有限温度や有限サイズ効果を調べる。

4.1 電磁場の量子化

電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ や磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$ は空間の各点におかれた電荷や電流に力を与える。電場は点 $\boldsymbol{x}$ におかれた大きさ q の電荷に，

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) \tag{4.3}$$

の力を与え，また磁場は電流 $\boldsymbol{j}$ に，

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) \tag{4.4}$$

の力を与える。このように電場や磁場はテストのためおかれた電荷や電流に与える力を通して直接観測にかかる。近接作用論では，空間的に離れた物体間の力や相互作用が，物体間の空間における場を媒介にして引き起こされると考える。近接作用論では，電磁気現象は電磁場によって引き起こされるとみなす。物質によってつくられた場は，個々の物質の種類とは関係なく，いかなる物体でも共通である。そのため場の考えは，電荷や電流を担う物体に関係なく普遍的に起こる電磁気現象を理解するのに極めて好都合である。

一方，電場や磁場は空間の関数であるとともに時間の関数であり，真空中でマックスウェル方程式 (2.34), (2.35), (2.36), (2.37) に従う。これは波動方程式であり，真空中で波の形で伝搬する解をもつ。波はエネルギーや運動量を運ぶ物理的な実体である。

前章のスカラー場は，ニュートンの運動方程式と同等な時間について2階の微分方程式に従った。しかし電場や磁場に関するマックスウェル方程式は，時間に関する1階の微分方程式でありニュートンの運動方程式とは異なる形をしている。この形は量子化に際しては不便である。2章で示したようにベクトルポテンシャルを導入して，マックスウェル方程式を書き換えて，方程式，

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu(\boldsymbol{x},t) - \partial_\mu \partial^\nu A_\mu(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{4.5}$$

が得られる。これは，ニュートン方程式と同等な時間について2階の微分方程式となる。このように，ベクトルポテンシャルを使うと運動方程式が正準形式の形に容易に書けるため，量子化を行うにはベクトルポテンシャルが都合がよい。ベクトルポテンシャルを力学変数とみなして行う量子化は，質点の量子化と本質的に同等である。しかし電場や磁場と異なり，ベクトルポテンシャルは直接観測にかかる物理量ではない。ベクトルポテンシャルから電場や磁場は一意的に決定されるが，逆に電場や磁場からベクトルポテンシャルは一意的に決まらない。この点は，ベクトルポテンシャルにより表された理論が，余分の自由度をもち束縛条件を満たすことに反映されている。

第2章で表されたように，ラグランジアン

$$L = -\frac{1}{4}{F_{\mu\nu}}^2, \quad F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \tag{4.6}$$

が電磁場の系を記述する。

このラグランジアンは，二つの拘束条件

$$\Pi_0(x) = 0 \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Pi}(x) = 0 \tag{4.8}$$

とハミルトニアン，

$$H = \int d^3x\, \Pi_i(x)\dot{A}_i(x) - \int d^3x L \tag{4.9}$$

$$= \int d\boldsymbol{x}\left(\frac{1}{2}\Pi_i(x)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)^2 + A_0(x)\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Pi}(x)\big)\right) \tag{4.10}$$

で表される。量子論における交換関係は通常の場合，古典力学の正準形式におけるポアッソン括弧を交換関係に置き換えれば得られる。今の場合，2つの拘束条件を満たしながら成立する力学変数の交換関係が必要である。

拘束条件を満たすヒルベルト空間の構成法はいろいろあり，後の章で非可換ゲージ理論を論ずる際に一般論を与えることにする。今の場合は拘束条件に関与する自由度を量子化の前に除外することにする。この方法は，拘束条件を最も簡単に処理する方法であるが，適用できるのは限られている。

式 (4.7) より A_0 の共役運動量が恒等的に 0 である。また，拘束条件のために A_0 は ハミルトニアン (4.10) に含まれていないとみなせる。そのため変数 A_0 と共役量は力学変数から除外される。また式 (4.8) より，電場の発散は拘束条件で決まっている。そのため，電場の発散は力学的な真の自由度ではない。また，ベクトル場の発散は縦波成分に対応するが，ハミルトニアン (4.10) に含まれていない。以上の理由から，電場やベクトルポテンシャルの縦波成分を初めに取り除いておいて，残っている真の自由度である横波を表す変数に対して量子化の交換関係を設定する。

時空座標の関数である場をフーリエ表示で

$$
\begin{aligned}
A_i(\boldsymbol{k},t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \sum_s \Big(& a(\boldsymbol{k};s,t)e^{i\boldsymbol{kx}}e_i(\boldsymbol{k},s) \\
& + a^\dagger(\boldsymbol{k},;s,t)e^{-i\boldsymbol{kx}}e_i^*(\boldsymbol{k},s)\Big) \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

$$
\omega = |\boldsymbol{k}| \qquad (4.12)
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_i(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \sum_s \Big(& c(\boldsymbol{k};s,t)e^{i\boldsymbol{kx}}e_i(\boldsymbol{k},s) \\
& - c^\dagger(\boldsymbol{k},;s,t)e^{-i\boldsymbol{kx}}e_i^*(\boldsymbol{k},s)\Big) \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

と展開する。ここで，$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k},s)$ は分極ベクトルであり，$s = 1,2$ が，横波また $s = 3$ が縦波を表している。

$$
\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k},s) = 0, \quad s = 1,2 \qquad (4.14)
$$

$$
\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k},3) = \frac{\boldsymbol{k}}{k} \qquad (4.15)
$$

このとき，拘束条件は

$$
\begin{aligned}
\partial_i\Pi_i(\boldsymbol{x},t) &= i\int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \sum_s \Big(c(\boldsymbol{k};s,t)e^{i\boldsymbol{kx}}k_ie_i(\boldsymbol{k},s) \\
&\qquad - c^\dagger(\boldsymbol{k};s,t)e^{-i\boldsymbol{kx}}k_ie_i^*(\boldsymbol{k},s)\Big) \\
&= 0 \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

となる。このため拘束条件を満足させる一つの方法は，展開式 (4.13) で横波だ

けをとることである。また,

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \sum_s \left(a(\boldsymbol{k}; s, t)\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}, s) e^{i\boldsymbol{kx}} + h.c. \right) \tag{4.17}$$

となるので,やはり $\boldsymbol{A}$ の横波だけがハミルトニアンやラグランジアンに寄与する。このため,ベクトル場の展開式には,横波成分だけを考慮するので十分である。正準方程式は,

$$\frac{d}{dt} A_i(\boldsymbol{x}, t) = \{A_i(\boldsymbol{x}, t), H\}_{PB} \tag{4.18}$$

$$\frac{d}{dt} \Pi_i(\boldsymbol{x}, t) = \{\Pi_i(\boldsymbol{x}, t), H\}_{PB} \tag{4.19}$$

であり,解は

$$c(\boldsymbol{k}; s, t) = i\omega a(\boldsymbol{k}; s, t) \tag{4.20}$$

となる。場の実の力学変数である横波成分でポアッソン括弧を置き換えることより,成分 $a(\boldsymbol{k}; s, t)$ の交換関係が,

$$[a(\boldsymbol{k}; s), a^\dagger(\boldsymbol{k}'; s')] = \delta(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')\delta_{ss'} \tag{4.21}$$

$$[a(\boldsymbol{k}; s), a(\boldsymbol{k}'; s')] = 0 \tag{4.22}$$

$$[a^\dagger(\boldsymbol{k}; s), a^\dagger(\boldsymbol{k}'; s')] = 0 \tag{4.23}$$

と得られ,ハミルトニアンが,

$$H = \sum \omega(\boldsymbol{k}) \left(a^\dagger(\boldsymbol{k}; s) a(\boldsymbol{k}; s) + \frac{1}{2} \right) \tag{4.24}$$

と表される。これは調和振動子と本質的に等価である。そのため,定常状態が真空状態 $|0\rangle$ と生成演算子 $a^\dagger(\boldsymbol{k}; s)$ から

$$a(\boldsymbol{k}; s)|0\rangle = 0 \tag{4.25}$$

$$|\boldsymbol{k}; s\rangle = a^\dagger(\boldsymbol{k}; s)|0\rangle \tag{4.26}$$

$$|\boldsymbol{k}_1; s_1, \boldsymbol{k}_2; s_2\rangle = a^\dagger(\boldsymbol{k}_1; s_1) a^\dagger(\boldsymbol{k}_2; s_2)|0\rangle \tag{4.27}$$

$$|\boldsymbol{k}_1; s_1, \cdots, \boldsymbol{k}_N; s_N\rangle = \prod_{l=1}^{l=N} a^\dagger(\boldsymbol{k}_l; s_l)|0\rangle \tag{4.28}$$

と構成される。このように構成された状態をフォック空間とよぶ。フォック空間の要素である各状態は,ハミルトニアンの固有状態であり,関係式

$$H|0\rangle = E_0|0\rangle \tag{4.29}$$

$$H|\boldsymbol{k}; s\rangle = (E_0 + \omega(\boldsymbol{k}))|\boldsymbol{k}; s\rangle \tag{4.30}$$

$$H|\boldsymbol{k}_1; s_1, \boldsymbol{k}_2; s_2\rangle = (E_0 + \omega(\boldsymbol{k}_1) + \omega(\boldsymbol{k}_2))|\boldsymbol{k}_1; s_1, \boldsymbol{k}_2; s_2\rangle \tag{4.31}$$

$$H|\boldsymbol{k}_1; s_1, \cdots, \boldsymbol{k}_N; s_N\rangle = \left(E_0 + \sum_{l=1}^{l=N} \omega(\boldsymbol{k}_l) \right) |\boldsymbol{k}_1; s_1, \cdots, \boldsymbol{k}_N; s_N\rangle \tag{4.32}$$

$$\omega(\boldsymbol{k}) = |\boldsymbol{k}|, \quad E_0 = \sum \frac{1}{2}\omega(\boldsymbol{k}) \tag{4.33}$$

を満たしていることが容易にわかる。ここで生成演算子と消滅演算子の交換関係を使った。これらの状態はハミルトニアンの固有状態であるので，時間発展はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = E\Psi \tag{4.34}$$

で決定される。その結果，任意の時刻における状態は，位相だけが時間とともに $e^{-iE/\hbar t}$ と変化する同じ状態ベクトルである。この状態は時刻が経過しても同じベクトルに保たれる定常状態である。

4.2 フォック空間と光子

4.2.1 フォック空間

状態 $|0\rangle$ は零光子状態，$|\boldsymbol{k}_1; s_1\rangle$ は一光子状態，$|\boldsymbol{k}_1; s_1, \boldsymbol{k}_2; s_2\rangle$ は二光子状態等の多光子状態を表す。それぞれは，決まったエネルギーの値をもつとともに，運動量やスピンが決まった値をもつ状態である。これを見るには，場の演算子で表したハミルトニアン，運動量，角運動量などの対応する物理量の固有値を具体的に計算するのがよい。また多光子状態は，同種粒子の交換に関して対称な状態である。だからこの状態が表す多体波動関数は，対称関数であり，光子はボース・アインシュタイン統計に従う。

ラグランジアンより電磁場が担う四元運動量演算子は，保存則を満たすエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ から

$$P_\mu = \int d^3x T_{0\mu} \tag{4.35}$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\rho \frac{\delta}{\delta\partial_\nu A_\rho} L - g_{\mu\nu} L \tag{4.36}$$

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{4.37}$$

と得られる。よってフーリエ表示式 (4.11) を代入すると，

$$P_\mu = \sum p_\mu a^\dagger(\boldsymbol{p}) a(\boldsymbol{p}) \tag{4.38}$$

と表される。さらに交換関係

$$[P_\mu, a^\dagger(\boldsymbol{p}_2, s_2)] = p_\mu a^\dagger(\boldsymbol{p}_2, s_2) \tag{4.39}$$

$$[P_\mu, a(\boldsymbol{p}_1, s_1)] = -p_\mu a(\boldsymbol{p}_1, s_1) \tag{4.40}$$

を使うことにより，状態ベクトル (4.26), (4.28) はエネルギーだけでなく運動量の値が決まった状態であることがわかる。

4.2.2　回転とローレンツ変換

座標軸の回転に対して場 $\phi_\alpha(x)$ が，

$$x_i \to x_i + \epsilon_{ij} x_j \tag{4.41}$$

$$\phi_\alpha \to \phi_\alpha + \delta\phi_\alpha \tag{4.42}$$

$$\delta\phi_\alpha = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}(C_{\mu\nu})_{\alpha\beta}\phi_\beta \tag{4.43}$$

と定数行列 $C_{\mu\nu}$ で変換されたとしよう。電磁場の変換則は

$$A_i(x) \to A_i'(x') = A_i(x) + \epsilon_{ij}A_j(x) + \epsilon_{lm}x_m\partial_l A_i(x) \tag{4.44}$$

であり，前章のスカラー場，次章のスピノール場，ベクトル場では変換の係数は

$$C_{\mu\nu} = 0, \quad \text{スカラー場} \tag{4.45}$$

$$C_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad \text{スピノール場} \tag{4.46}$$

$$C_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \tag{4.47}$$

$$(a_{\rho\sigma})_{\mu\nu} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}, \quad \text{ベクトル場} \tag{4.48}$$

である。ラグランジアンはこの変換に対して不変である。そのため，回転の生成子がエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を含む形で

$$L^{ij} = \int d^3x M^{0ij} \tag{4.49}$$

$$M^{\mu\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu} - \frac{\partial L}{\partial\phi_{\alpha;\mu}}(C_{\rho\sigma})_{\alpha\beta}\phi_\beta \tag{4.50}$$

と求まる。

座標軸のローレンツ変換に対しても，作用積分は不変である。しかし正準形式では時間を特別扱いするので，正準形式ではローレンツ不変性が見にくくなる。また，ゲージ不変性のために，さらにローレンツ不変性が見にくくなる。後の章で，ローレンツ不変性が明白であるように定式化する。

フォック空間の各状態は，回転やローレンツ変換で変換され，状態の集まり全体でこれらの変換の表現空間をなしている。これらの変換の生成子は，電磁場で

$$M^{\mu\nu} = \int d^3x M^{0\mu\nu} \tag{4.51}$$

と表される。

光子数は光を吸収するときは増加し，光を放出するときには減少する。光の数が変化する物理現象を記述するには，異なる光子数の状態ベクトルの集まりからなる大きなヒルベルト空間が，構成されていることが必要である。このとき，電磁場は光子数を一つ変える演算子になり，異なる光子数のベクトルを関連づける。物理量，演算子が従う運動方程式，状態ベクトルが従う波動方程式などや，散乱振幅がこの大きな空間で計算される。

場の交換関係はこのようにつくられた光子の多粒子状態が，粒子の交換に関して対称な波動関数であるボース統計を導く。この点を見るのに，多体波動関数を定義しこれを通して調べるのが都合がよい。次の波動関数，

$$\Psi(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N) = \langle 0|A_\mu(x_1)A_\mu(x_2)\cdots A_\mu(x_N)|\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \cdots, \boldsymbol{k}_N\rangle \tag{4.52}$$

を考えよう。これは局所場の演算子 $A_\mu(x_2)$ を，N 体光子状態と真空状態で挟んだものである。そのため，N 体状態を座標表示したものである。電磁場ポテンシャル演算子の生成演算子と消滅演算子による分解

$$A_i(\boldsymbol{x}, t) = \sum(a(\boldsymbol{k}; s, t)e^{i\boldsymbol{kx}}e_i(\boldsymbol{k}, s) + a^\dagger(\boldsymbol{k}, ; s, t)e^{-i\boldsymbol{kx}}e_i^*(\boldsymbol{k}, s)) \tag{4.53}$$

を代入すると，波動関数は全体で粒子数が一致する消滅演算子の積で求まる。消滅演算子は互いに交換するので，この波動関数は明らかに対称な関数で，

$$\begin{aligned}
&\Psi(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N) \\
&\quad = \exp i\sum \boldsymbol{k}_l\boldsymbol{x}_l \prod e_l(\boldsymbol{k}_l, s) \\
&\qquad \times \langle 0|a_{\mu_1}(k_1)a_{\mu_2}(k_2)a_{\mu_3}(k_3)\cdots a_{\mu_N}(k_N)|\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3\cdots, \boldsymbol{k}_N\rangle \\
&\quad = \exp i\sum \boldsymbol{k}_l\boldsymbol{x}_l \prod e_l(\boldsymbol{k}_l, s)\sum \delta(\boldsymbol{k}_l, \boldsymbol{k}_m)\delta_{s_l s_m}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

となっている。

フォック状態は，決まった運動量とスピン分極をもつ多光子状態を表す状態ベクトルである。ヒルベルト空間は，複素係数による重ね合わせの原理が成立するベクトル空間である。そのため，物理状態は複素数の波のように振る舞い，また期待値や分散は不確定性関係に従う。ところで，光は古典理論でも波であり，重ね合わせの原理が成り立つ。古典論では，しかしながら電場と磁場の間に不確定性関係は関与せず厳密な値が測定にかかる。電磁場の量子論における波の性質を調べるために，不確定性関係を最小にする特別な状態であるコヒーレント状態を考察しよう。

4.2.3 コヒーレント状態

場の交換関係より，正準運動量である電場と正準座標であるベクトルポテンシャルで表される磁場は交換しない。かわりに電場と磁場は交換関係，

$$[E_i(\boldsymbol{x},t),B_j(\boldsymbol{y},t')]\delta(t-t')=i\hbar\epsilon_{jkl}\delta_{il}\frac{\partial}{\partial y_k}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta(t-t') \tag{4.55}$$

を満たしている。だから電場や磁場を適当な重みをつけて積分した

$$E_f(t)=\int d^3x\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) \tag{4.56}$$

$$B_g(t)=\int d^3x\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) \tag{4.57}$$

は，交換関係

$$[E_f(t),B_g(t')]\delta(t-t')=-i\hbar(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{g}) \tag{4.58}$$

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{g})=\epsilon_{ikj}\int d^3xf_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_k}g_j(\boldsymbol{x}) \tag{4.59}$$

を満たしている。右辺が0にならないとき，両者の同時固有状態はありえず，だから両者を同時に精密測定するのには不確定性関係からの必然的な制限がある。不確定性関係は，任意な状態について求まる分散に，不等式

$$\Delta E_f(t)^2\Delta B_g(t)^2\geq\frac{\hbar^2}{4}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{g})^2 \tag{4.60}$$

を成立させる。特別の多体状態で，上式の等式が成立する。このとき，電場と磁場の分散の積は量子論で許される最小の値をとる。この状態はコヒーレント状態とよばれ，二つの分散の積を最小にする量子論の状態である。コヒーレント状態は，最も古典的な性質をもつ状態である。

次に運動量表示でコヒーレント状態を求めよう。運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつ光子数を表す演算子は

$$n(\boldsymbol{p})=a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) \tag{4.61}$$

と表せる。光子のフォック状態は，すべて光子数演算子の固有状態である。ところが，コヒーレント状態は光子数演算子の固有状態ではなく，消滅演算子の固有状態であり，

$$a(\boldsymbol{p})|f(\boldsymbol{p})\rangle=f(\boldsymbol{p})|f(\boldsymbol{p})\rangle \tag{4.62}$$

を満たしていて，

$$|f(\boldsymbol{p})\rangle=e^{-|f(\boldsymbol{p})|^2/2}\sum_l\frac{1}{\sqrt{l!}}f(\boldsymbol{p})^l|l\rangle \tag{4.63}$$

$$|l\rangle=\frac{(a(\boldsymbol{p})^\dagger)^l}{\sqrt{l!}}|0\rangle \tag{4.64}$$

と表される。そのためエネルギーの固有状態ではなく，だから定常状態ではない。エネルギーの平均値や分散は 0 ではなく，

$$\langle f(\boldsymbol{p})|H|f(\boldsymbol{p})\rangle = N^{-1}\sum_n n|\boldsymbol{p}||f(\boldsymbol{p})|^{2n}/n! = |\boldsymbol{p}||f(\boldsymbol{p})|^2 \tag{4.65}$$

$$\langle f(\boldsymbol{p})|H^2|f(\boldsymbol{p})\rangle = N^{-1}\sum_n n^2|\boldsymbol{p}|^2|f(\boldsymbol{p})|^{2n}/n! = |\boldsymbol{p}|^2|f(\boldsymbol{p})|^4 + |\boldsymbol{p}||f(\boldsymbol{p})|^2 \tag{4.66}$$

$$\delta E^2 = \langle|H^2|\rangle - \langle|H|\rangle^2 = |\boldsymbol{p}||f(\boldsymbol{p})|^2$$

$$N = \sum_n |f(\boldsymbol{p})|^{2n}/n! = e^{|f(\boldsymbol{p})|^2} \tag{4.67}$$

である。コヒーレント状態は消滅演算子の固有状態であるので，多くの特徴をもつ。その一つが，消滅演算子を何度かけても固有値が単純にべき乗されるだけで，状態は同じ状態に保たれていることである。だから古典論に近い性質をもつ。

4.3 波　　束

フーリエ展開では式 (4.12) のように，場の演算子を平面波を表す指数関数かまたは三角関数で展開する。展開係数は，そのモードに対応する生成・消滅演算子である。だからこの演算子で生成された状態は，空間で一様な存在確率をもつ無限に広がった状態である。現実の世界で無限に広がっている波をつくることは難しい。しかし波が近似的に無限に大きいとみなせる状況は数多い。この場合には，フーリエ展開による運動量状態で考察することが有効である。逆に，空間の非常に小さい領域でだけ値をもつ波もある。このような空間で局在した波は，どのように表され，またどのように時間発展するのだろうか？　このような波は，平面波を重ね合わせて得られる。重ね合わせる重みを簡単な関数で表しておくと，具体的計算がしやすくまた定性的性質を調べやすい。ここではガウス型関数で重みが定義されている波束 (Gaussian wave packet) からなる光子の一粒子状態，多粒子状態，やさらにコヒーレント状態の性質を詳しく調べる[1)]。

1) K. Ishikawa and T. Shimomura, Prog. Theor. Phys. **114**, 1201-1234(2005).

4.3.1　一粒子状態

運動量表示を使い波束状態

$$\Psi(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{x}_0,T_0)=N\int d^3p\exp\left(-\frac{\sigma}{2}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0)^2-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}_0-i\omega(t-T_0)\right)|\boldsymbol{p}\rangle \quad (4.68)$$

$$N=(\pi\sigma)^{-\frac{3}{4}},\quad \omega=c|\boldsymbol{p}| \quad (4.69)$$

を考えよう。この状態では，様々な運動量の波が，$\boldsymbol{p}_0$ を中心に重ね合わされている。そのため，$\boldsymbol{p}_0$ は運動量の平均値である。また，後でわかるように $\boldsymbol{x}_0$ は座標の中心であり，σ は波束の広がりの度合いを示すパラメーターである。粒子エネルギーは運動量の大きさで決まる。だから運動量の大きさが異なる状態は，異なるエネルギーをもつ。そのため波束状態は定常状態ではなく，時間とともに変化する状態である。エネルギーの広がりは，時間とともに変化せず一定に保たれる。しかし，空間の広がりは一定ではない。空間依存性はフーリエ逆変換で求まる。座標表示に逆変換した関数形は，

$$\begin{aligned}&\Psi(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{x}_0,T_0)\\&=N\int d^3p\exp\left(-\frac{\sigma}{2}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0)^2-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}_0-i\omega(t-T_0)\right)\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{p}\rangle|\boldsymbol{x}\rangle\\&=N\int d^3p\exp\left(-\frac{\sigma}{2}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0)^2-i\omega(t-T_0)+i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\right)|\boldsymbol{x}\rangle \quad (4.70)\end{aligned}$$

となる。この積分を実行して，t とともに変化する波束の形を求めよう。光子の質量は 0 であるが，ここでは一般化した有限質量の場合で分散が，

$$\omega=c\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2} \quad (4.71)$$

である場合を求めておくことにする。また，$c=1$ の単位系を使う。

I.

$t-T_0$ が小さいとき，$\boldsymbol{p}_0$ を中心とするガウス積分を実行して

$$\begin{aligned}&\Psi_I(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{x}_0)=N\exp\left(i\boldsymbol{p}_0\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)-i\omega_0(t-T_0)\right)\times\\&\int d^3p\exp\left(-\frac{\sigma}{2}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0)^2-i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0)\boldsymbol{v}_0(t-T_0)+i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\right)|\boldsymbol{x}\rangle\\&\qquad=N\exp\left(i\boldsymbol{p}_0\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)-i\omega_0(t-T_0)\right)\times\\&\int d^3p\exp\left(-\frac{\sigma}{2}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0)^2-i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0)\boldsymbol{v}_0(t-T_0)+i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\right)|\boldsymbol{x}\rangle\\&\qquad=\exp\left(i\boldsymbol{p}_0\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)-i\omega_0(t-T_0)\right)\\&\qquad\quad\times\exp\left(-\frac{1}{2\sigma}\left((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)_T^2+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{v}_0(t-T_0))_L^2\right)\right) \quad (4.72)\end{aligned}$$

を得る。ここで，速度は

$$v_{0i} = \frac{\partial \omega(\boldsymbol{p})}{\partial p_i} = \frac{p_i}{\omega(\boldsymbol{p})} \tag{4.73}$$

であり，$\boldsymbol{x}_L$ は $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{v}_0$ 方向に射影したものであり，$\boldsymbol{x}_T$ は $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{v}_0$ への垂直成分である。波束の中心の位置 $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_0(t - T_0)$ は，群速度 $\boldsymbol{v}_0$ で等速度運動している。また，波束の広がりは一定の値 $\sqrt{2\sigma}$ に保たれる。

II.

$t - T_0$ がもう少し大きくなると，エネルギー分散で展開式，

$$\omega(\boldsymbol{p}_0 + \boldsymbol{p}) = \omega(\boldsymbol{p}_0) + \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} + \frac{1}{2} p_i p_j C_{ij} \tag{4.74}$$

$$C_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial p_i \partial p_j} \tag{4.75}$$

を使う。これより，

$$\begin{aligned}
&\Psi_{II}(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{x}_0) \\
&= N \exp(i\boldsymbol{p}_0 \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) - i\omega_0(t - T_0)) \int d^3p \exp\left(-\frac{\sigma}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0)^2\right) \times \\
&\exp\left(-i\left((\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0)\boldsymbol{v}_0 + (p - p_0)_i (p - p_0)_j C_{ij}(t - T_0)\right) + i(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\right) |\boldsymbol{x}\rangle \\
&= \left(1 - i\frac{(t - T_0)}{E(\boldsymbol{p}_0)\sigma}\right)^{-1} \left(1 - i\frac{m^2(t - T_0)}{E(\boldsymbol{p}_0)^3\sigma}\right)^{\frac{-1}{2}} \exp\left(i\boldsymbol{p}_0 \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) - i\omega_0(t - T_0)\right) \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma}\left(\frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)_T^2}{1 - i\frac{(t - T_0)}{E(\boldsymbol{p}_0)\sigma}} + \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{v}_0(t - T_0))_L^2}{1 - i\frac{m^2(t - T_0)}{E(\boldsymbol{p}_0)^3\sigma}}\right)\right) |\boldsymbol{x}\rangle
\end{aligned} \tag{4.76}$$

が得られる。 $\Psi_{II}(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{x}_0)$ は時間差 $t - T_0$ が小さいときは，$\Psi_I(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{x}_0)$ に一致する。また，時間差 $t - T_0$ が大きいときは，指数関数は座標に依存する位相をもつことがわかる。

III.

$t - T_0$ ががさらに大きくなると，指数部の位相が大きく振動する。そのため，位相部が停留的となる運動量のまわりで展開して積分する。この計算の結果，波束が広がることがわかる。波束は時間の経過とともに徐々に広がる。広がる速さは，初期値 σ が大きな波束では小さいが，初期値が小さな波束では急速に広がる。広がり方は，波長と波束の大きさの両パラメーターに大きく依存している。以下，具体的に t が大きい場合で，積分の振る舞いを saddle point method (鞍点法) で見積もる。質量 m の場合の停留位相の条件

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left(-i\omega(\boldsymbol{p})(t - T_0) + i\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_0) - \frac{\sigma}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{P}_0)^2\right) = 0 \tag{4.77}$$

を $t-T_0$ が大きいところで解く。上式から，位相は，$t-T_0$ と $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_0)$ で決まる運動量

$$\boldsymbol{P}_X = \boldsymbol{P}_X^{(0)} + \boldsymbol{P}_X^{(1)} + \boldsymbol{P}_X^{(2)} \tag{4.78}$$

$$\boldsymbol{P}_X^{(0)} = m\frac{1}{\sqrt{(t-T_0)^2-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_0)^2}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_0) \tag{4.79}$$

$$\boldsymbol{P}_X^{(1)} = i\frac{1}{t-T_0}\sigma\hbar\omega(\boldsymbol{P}_X)(\boldsymbol{P}_X-\boldsymbol{P}_0) \tag{4.80}$$

$$\boldsymbol{P}_X^{(2)} = o((t-T_0)^{-2}) \tag{4.81}$$

で停留的となる。被積分関数の指数部を $\boldsymbol{P}_X$ の近傍で展開し積分を実行し，関数が

$$\Psi_{III}(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{X}_0,T_0) = Ne^{-i\omega(\boldsymbol{p}_0)(t-T_0)+i\boldsymbol{p}_0\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)} \tag{4.82}$$

$$N = N_3\left(\frac{1}{2i\frac{1}{\gamma_L\sigma}+1}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2i\frac{1}{\gamma_T\sigma}+1}\right)e^{-\frac{1}{2}\sigma(\boldsymbol{P}_X^{(0)}-\boldsymbol{P}_0)^2+\delta} \tag{4.83}$$

$$\delta = \frac{1}{2}\sigma(\boldsymbol{P}_X-\boldsymbol{P}_0)^2(2i-\xi)\xi \tag{4.84}$$

$$\xi = \frac{\hbar\sigma\omega(\boldsymbol{P}_X)}{(t-T_0)} \tag{4.85}$$

と求まる。ここで，

$${\gamma_T}^2 = \frac{1}{2}\sigma\frac{(\omega(\boldsymbol{P}_0))^2}{(t-T_0)^2} \tag{4.86}$$

$${\gamma_L}^2 = \frac{1}{2}\sigma\frac{(\omega(\boldsymbol{P}_0))^6}{m^4(t-T_0)^2} \tag{4.87}$$

である。振幅の大きさ N は，漸近条件から決まる運動量 $\boldsymbol{P}_X$ が波束の中心運動量 $\boldsymbol{P}_0$ に一致するとき最大になる。これは位置座標 $\boldsymbol{x}$ が次の関係式を満たす座標 $\boldsymbol{x}_0$，

$$\boldsymbol{P}_0 = m\frac{1}{\sqrt{(t-T_0)^2-(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{X}_0)^2}}(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{X}_0) \tag{4.88}$$

で実現する。これを座標について解いて，時刻 t における波束の中心が

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{X}_0 + (t-T_0)\frac{\boldsymbol{P}_0}{\omega(\boldsymbol{P}_0)} \tag{4.89}$$

と求まる.

これらの位置座標を使い，運動量の差 $\boldsymbol{P}_X-\boldsymbol{P}_0$ が座標 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}_0$ ならびに $\boldsymbol{p}_1$ 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{n}_1$ で，

$$\boldsymbol{P}_X-\boldsymbol{P}_0 = \frac{\omega(\boldsymbol{P}_0)}{t-T_0}\left\{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)_T + \frac{\omega(\boldsymbol{P}_0)^2}{m^2}\big|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)_L\big|\boldsymbol{n}_1\right\} \tag{4.90}$$

と表される。さらにこれらをガウス型関数に代入して

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma(\boldsymbol{P}_X-\boldsymbol{P}_0)^2\right)$$
$$=\exp(-{\gamma_T}^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)_T{}^2-{\gamma_L}^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)_L{}^2) \tag{4.91}$$

となる。この結果から，波束の大きさが時間変化することがわかる。波束は，小さな $|t-T_0|$ では

$$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^2\right) \tag{4.92}$$

と振る舞う。よって，波束の広がりは進行方向で

$$\delta x_L=\sqrt{\frac{2}{\sigma}}\frac{m^2|t-T_0|}{\omega(\boldsymbol{P}_0)^3}+\sqrt{2\sigma} \tag{4.93}$$

となり，進行方向に垂直な方向で

$$\delta x_T=\sqrt{\frac{2}{\sigma}}\frac{|t-T_0|}{\omega(\boldsymbol{P}_0)}+\sqrt{2\sigma} \tag{4.94}$$

となる。波束は時間とともに，横方向で速さ

$$v_T=\sqrt{\frac{2}{\sigma}}\frac{1}{\omega(\boldsymbol{P}_0)} \tag{4.95}$$

で，縦方向で速さ

$$v_L=\sqrt{\frac{2}{\sigma}}\frac{m^2}{(\omega(\boldsymbol{P}_0))^3} \tag{4.96}$$

で広がる。

上の結果より，波束の広がる速さと初期状態の大きさ $\delta x(t=0)$ とは，不確定性関係

$$v_T\delta x(t=0)\omega(\boldsymbol{P}_0)=1 \tag{4.97}$$

$$v_L\delta x(t=0)\omega(\boldsymbol{P}_0)=\left(\frac{m}{\omega(\boldsymbol{P}_0)}\right)^2 \tag{4.98}$$

を満たす。質量が 0 である場合は，すべての波が同じ光速で伝播するため縦方向では速さの広がりがなく，空間的な広がりが一定であり $v_l=0$ となる。波の方向のばらつきから，横方向の速さは一定ではないので，波束は横方向には空間的に広がる。小さい質量の場合は，横方向には大きく広がり，縦方向にはわずかに広がる。

例として，$t=500$ 秒として波束の大きさを見積もった結果が図 4.1 に描かれている。

波束の広がりが波長よりはるかに大きい場合であるマクロな波束か準マクロな波束に対しては，広がりの時間的変化は無視できることがわかる。しかし，

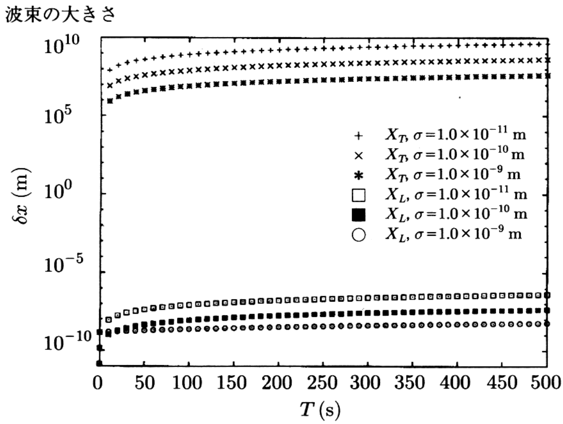


図 4.1　広がる波束

波束の広がりと波長が同じ程度の大きさであるミクロな波束に対しては，広がりの時間的変化が大きくなることがわかる。

波束は波であるがその大きさが小さいので粒子的な性質ももつ。粒子と波とを区別するのは干渉や回折等の現象である。次に波束状態での波を使い干渉を調べる。

4.3.2　波束によるヤングの干渉実験

時刻 $t = T_0$ で二つの穴を通過した波は，二つの波束からなる状態であるとみなせる。二つの波束がほぼ平行に進み波束の間隔が一定に保たれる場合に，波の干渉がどのように変わるかを見る。そのため，合成波が時間とともにどう変化するかをまず追ってみる。中心を $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ にもつ波束の和は，

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{x}_1) + \Psi(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{x}_2) \tag{4.99}$$

である。簡単のために，運動量の中心は同じ値 $\boldsymbol{p}_0$ であり，波束の大きさも同じであるとする。これらが異なる場合の計算は，以下の計算とあまり変わらない。

波束の広がりが無視できる $t - T_0$ が小さい場合と，波束の広がりが無視できない $t - T_0$ が大きい場合とを共通に扱える関数形 ψ_{II} を使おう。

$t - T_0$ が大きくなり波束が広がる場合は，合成波の振る舞いは波に固有の干渉を示す。$\boldsymbol{x}_{1L} = \boldsymbol{x}_{2L}$ である場合の II の領域の波動関数から，合成波が，

$$\Psi = \Psi_{II}(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{x}_1) + \Psi_{II}(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{x}_2) \tag{4.100}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1 - i\frac{(t-T_0)}{E(\boldsymbol{p}_0)\sigma}\right)^{-1}\left(1 - i\frac{m^2(t-T_0)}{E(\boldsymbol{p}_0)^3}\sigma\right)^{-1/2} \\
&\quad \times \exp(i\boldsymbol{p}_0\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) - i\omega_0(t-T_0)) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{v}_0(t-T_0))_L^2}{2\sigma(1-i\frac{m^2(t-T_0)}{E(\boldsymbol{p}_0)^3\sigma})}\right) \\
&\quad \times \left(\exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)_T^2}{2\sigma(1-i\frac{(t-T_0)}{E(\boldsymbol{x}_0)\sigma})}\right) + \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2)_T^2}{2\sigma(1-i\frac{(t-T_0)}{E(\boldsymbol{p}_0)\sigma})}\right)\right)
\end{aligned}
$$

となる。以上では，質量は有限であるとした。質量が有限であるときは，進行方向における波束の広がりが $\frac{m^2}{E(\boldsymbol{p}_0)^2}$ に比例する。光子では実際は質量が 0 である。質量が 0 である場合は，

$$
\begin{aligned}
\Psi &= \Psi_{II}(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{x}_1) + \Psi_{II}(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{x}_2) \\
&= \left(1 - i\frac{(t-T_0)}{E(\boldsymbol{p}_0)\sigma}\right)^{-1}\exp\left(i\boldsymbol{p}_0\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) - i\omega_0(t-T_0)\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma}\left((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{v}_0(t-T_0))_L^2\right)\right)\Psi_T
\end{aligned}
\tag{4.101}
$$

$$
\Psi_T = \left(\exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)_T^2}{2\sigma(1-i\frac{(t-T_0)}{E(\boldsymbol{p}_0)\sigma})}\right) + \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2)_T^2}{2\sigma(1-i\frac{(t-T_0)}{E(\boldsymbol{p}_0)\sigma})}\right)\right) \tag{4.102}
$$

である。波束の進行方向では波束は初期の状態のままに保たれ，垂直方向では波束は広がる。垂直方向に，十分広がった波束の広がりよりも小さい領域での振る舞いは，上記波動関数の最後の垂直方向の関数 Ψ_T から決まる。この複素波を，波の波長 λ と波の伝播距離 L を使う見やすい形に書き換えると，

$$
\Psi_T = e^{-\frac{A_1}{2(\sigma^2+R^2)}(\sigma+iR)} + e^{-\frac{A_2}{2(\sigma^2+R^2)}(\sigma+iR)} \tag{4.103}
$$

$$
A_1 = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)_T^2, \quad A_2 = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2)_T^2 \tag{4.104}
$$

$$
R = \frac{t-T_0}{E_0} = \frac{\lambda L}{2\pi} \tag{4.105}
$$

$$
L = t - T_0, \quad \lambda = \frac{2\pi}{p} \tag{4.106}
$$

となる。波の絶対値の 2 乗は，

$$
\begin{aligned}
|\Psi_T|^2 &= e^{-\frac{A_1}{(\sigma^2+R^2)}\sigma} + e^{-\frac{A_2}{(\sigma^2+R^2)}\sigma} \\
&\quad + 2e^{-\frac{A_1+A_2}{2(\sigma^2+R^2)}\sigma}\cos\frac{R}{(\sigma^2+R^2)}(A_1-A_2)
\end{aligned}
\tag{4.107}
$$

である。

以上の結果から，$\sigma \gg R$ の領域では

$$|\Psi_T|^2 = e^{-\frac{A_1}{\sigma}} + e^{-\frac{A_2}{\sigma}} + 2e^{-\frac{A_1+A_2}{2\sigma}\sigma} \tag{4.108}$$

となり，正定値の和の2乗となり波に固有の干渉は見えない。しかし，$\sigma \ll R$ の領域では

$$|\Psi_T|^2 = 2 + 2\cos\frac{1}{R}(A_1 - A_2) \tag{4.109}$$

となり，波に固有の干渉が現れる。垂直方向の干渉波の波長 δ_T は，

$$|(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)|\delta_T = \pi R \tag{4.110}$$

を解いて得られ，

$$\delta_T = \frac{\pi R}{|(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)|} \tag{4.111}$$

$$= \frac{\lambda L}{|(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)|} \tag{4.112}$$

となる。

時刻 t で場所 $\boldsymbol{x}$ にスクリーンがあり，スクリーンでの光の強度が観測にかかるとする。これらの干渉は波に特徴的な現象である。スクリーン上で波束が，2点の間隔よりも小さい場合は干渉は消失する。だから，小さい波束では干渉が消失することが多い。しかしスリットの大きさが極端に小さく，スリットとスクリーンまでの距離が長い場合は，スクリーン上では波束は大きく広がる。そのため，干渉が生じる。ところで，量子現象は本質的に波動現象であるので量子論に起源をもつ干渉では，プランク定数に依存する結果となる。干渉が観測されるためには，干渉による振幅の山や谷が分離することが必須である。

スリットを通った波が，スクリーン上でつくる波動関数の絶対値の2乗がスクリーン上での観測量に比例する。しかし，スクリーン上の観測に使われる測定器が有限の分解能をもつ場合の測定にかかる確率振幅は，入射波と有限な分解能をもつ波を表す波束との重なりである。このような観測では，入射波の波束と測定器を表す波束との重なり積分の絶対値の2乗が確率となる。

$t - T_0$ が小さい場合は，波の進行方向に垂直な方向では，二つの波の位相差がない。だから，合成された波は同じ符号で足されることになり，波に固有の干渉のパターンを示さない。このため，合成波は単純な足し算で求まり，干渉が起きない。

4.3.3 波束とコヒーレント状態

コヒーレント状態は特殊な相関をもつ多粒子状態であるため，多くの興味深い性質をもち，応用上も重要である。異なる運動量の波を重み $\rho(\boldsymbol{p})$ で重ね合

わせて得られる生成演算子 A_ρ,

$$A_\rho = \int dpa(\boldsymbol{p})\rho(\boldsymbol{p}) \tag{4.113}$$

からつくられるコヒーレント状態は

$$\exp\left(A_\rho^\dagger g - A_\rho g^*\right)|0\rangle \tag{4.114}$$

である。ここで,

$$\rho(\boldsymbol{p}) = \sum_n \delta(p_x)\delta(p_y)\delta(p_z - np_0)f_n \tag{4.115}$$

である場合を考えよう。これは, 運動量 $(0, 0, np_0)$ をもつ光子を決まった重み f_n で重ね合わせた状態である。この状態は, また

$$\prod_n \exp\left(a^\dagger(0, 0, np_0)f_n g - a(0, 0, np_0)f_n g^*\right)|0\rangle \tag{4.116}$$

と表せることより, 各運動量 $(0, 0, np_0)$ でコヒーレント状態である状態の直積である。この状態は様々なエネルギーをもつ状態の重ね合わせであるため, 定常状態ではない。時間でフーリエ変換すると, 時間方向に周期的に並んだ波であることがわかる。

広い振動数領域で等間隔に並んだ振動数をもつ波は, 時間の精密測定や振動数の精密測定に使われる。

多粒子波束状態

時空座標の関数である場を波束の関数で展開することにより, 波束の多体状態を表す演算子が構成できる。フーリエ展開式と波束光子の消滅演算子の定義,

$$\tilde{a}(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{X}_0, T_0) = \int d^3p \langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{X}_0, T_0\rangle a(\boldsymbol{p}) \tag{4.117}$$

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{X}_0, T_0\rangle &= e^{\frac{E(\boldsymbol{p})}{i\hbar}(-T_0)} \langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{X}_0\rangle \\ &= N_3 \sigma^{3/2} e^{\frac{E(\boldsymbol{p})}{i\hbar}(-T_0)} e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{X}_0 - \frac{\sigma}{2}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{P}_0)^2} \end{aligned} \tag{4.118}$$

を使うことより, 場が波束の波動関数により,

$$A_i(\boldsymbol{x}, t) = \int \frac{d\boldsymbol{P} d\boldsymbol{X}}{(2\pi)^3} \left(C_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{X}, T_0, s)\tilde{a}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{X}, T_0, s) + h.c.\right) \tag{4.119}$$

$$C_i(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}, T_0, s) = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})}} e_i(\boldsymbol{p}, s)\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{p}\rangle\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{P}, \boldsymbol{X}, T_0\rangle \tag{4.120}$$

と展開できる。場 $\tilde{a}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{X}, T, s)$ は波束状態にある光子を消滅する演算子である。波束状態は, 非直交系であるが,

$$\int \frac{d\boldsymbol{P} d\boldsymbol{X}}{(2\pi)^3} |\boldsymbol{P}, \boldsymbol{X}, T_0\rangle\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{X}, T_0| = 1 \tag{4.121}$$

を満たし完全性をなす。このため，波束状態に対して定義される振幅は，確率を与えることがわかる。

4.4 物質中の電磁場

4.4.1 誘電率，透磁率

物質中では，電場や磁場は真空中とは異なる性質をもつ。しかもその性質は物質により大きく異なる。物質は，定常電流が流れる金属と流れない絶縁体に分かれる。金属中では自由に動き回れる電子 (自由電子) がたくさんある。自由電子は，電場の下で容易に位置を変える。だから，外部電場が加えられたとき電荷が容易に動き，定常電流が流れる。ところが，絶縁体では自由電子はなく，すべての電子は原子に束縛されている。そのため電荷が容易に動くことはできない。

金属の物理を解明するためには，多電子系を調べる必要がある。この多電子系の問題は，本章の課題ではなくここでは議論しない。この章では，絶縁体をおもに調べることにする。

絶縁体には電場中で有限な電気分極をもつ誘電体と，磁場中で有限な磁気分極をもつ磁性体がある。これら物質の効果は，また有限の誘電率と透磁率で表せる。誘電率と透磁率は時空の対称性を破るわけではなく，スカラー量である。この点，電場や磁場が 0 である際に現れる自発誘電分極と自発磁化とは大きく異なる。これら自発誘電分極と自発磁化は，空間反転や時間反転対称性の自発的な破れがあるとき現れる。自発分極がなく対称性が破れない誘電体で電束密度は，

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{4.122}$$

と電場に比例する。比例係数である誘電率 ϵ は，今の場合一定の値をもつとする。これは明らかにスカラーである。同様に自発分極がないとき磁性体では磁束密度は，

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{4.123}$$

と磁場に比例する。比例係数である透磁率 μ もやはり一定の値をもつスカラーとする。このときマックスウェル方程式は，

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = 0 \tag{4.124}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{4.125}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} \tag{4.126}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D} \tag{4.127}$$

となる。ここで電束密度や磁束密度は電場や磁場と

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{4.128}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{4.129}$$

と関係している。比例係数 ϵ と μ は，物質のミクロな性質から計算することは可能であるが，これは物性物理の問題であり，本章の目的とは異なる。そのため，ここでは議論せず，ϵ と μ が実数で与えられているとして，電磁気学の量子論を調べる。まず，電磁場をベクトルポテンシャルを導入して表そう。

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{\partial}{\partial t}A_i - \frac{\partial}{\partial x_i}A_0 \\ H_i &= \epsilon_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}A_k - \frac{\partial}{\partial x_k}A_j\right) \end{aligned} \tag{4.130}$$

エネルギー密度は

$$L = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} \tag{4.131}$$

であり，ラグランジアン密度は

$$L = \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}A_i - \frac{\partial}{\partial x_i}A_0\right)^2 - \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_j}A_k - \frac{\partial}{\partial x_k}A_j\right)^2 \tag{4.132}$$

と表される。

エネルギーバンドをもつ光 (photonic band light)

誘電率が空間で周期的に変化する物質中では，周期ポテンシャルのためにマックスウェル方程式の解である光は真空中とは異なる性質をもち，バンド構造をなす。ちょうど周期ポテンシャル中での電子が有限のギャップで開いたスペクトルをもつのと同等であり，光のエネルギー固有値にギャップが生ずる。光のエネルギーは真空中では cp であるが，周期的に誘電率が変化する物質中では $E(\boldsymbol{p})$ は複雑な関数になる。

空間反転と時間反転

自発分極や自発磁化がある場合は，時間や空間の反転の対称性が破れている。これらの対称性が破れた物理系は，通常の電磁気学とは異なる性質をもつ。この電磁気学を調べるため，まず四元ベクトルポテンシャルの空間反転や時間反転に対する変換性を明らかにしておこう。次に，これらの対称性を破る系の電磁気学を調べる。

空間反転

空間反転は，時間を不変にしたままで空間座標を

$$\begin{aligned} x_0 &\to x_0 \\ x_i &\to -x_i \end{aligned} \tag{4.133}$$

と反転することである。このとき，質点の位置ベクトルや速度ベクトルは符号を変える。このため，電荷密度は不変であるが，電流密度は符号を変える。

$$\rho(\boldsymbol{x}, x_0) \to \rho(-\boldsymbol{x}, x_0) \qquad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, x_0) \to -\boldsymbol{j}(-\boldsymbol{x}, x_0) \tag{4.134}$$

よって電荷密度や電流密度を源とするマックスウェル方程式から，電場や磁場は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, x_0) &\to -\boldsymbol{E}(-\boldsymbol{x}, x_0) \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, x_0) &\to \boldsymbol{B}(-\boldsymbol{x}, x_0) \end{aligned} \tag{4.135}$$

と変換される。これより，ベクトルポテンシャルは

$$\begin{aligned} A_0(\boldsymbol{x}, x_0) &\to A_0(-\boldsymbol{x}, x_0) \\ A_i(\boldsymbol{x}, x_0) &\to -A_i(-\boldsymbol{x}, x_0) \end{aligned} \tag{4.136}$$

と変換される。このとき，電場の2乗や磁場の2乗は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, x_0)^2 &\to \boldsymbol{E}(-\boldsymbol{x}, x_0)^2 \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, x_0)^2 &\to \boldsymbol{B}(-\boldsymbol{x}, x_0)^2 \end{aligned} \tag{4.137}$$

と不変であり，また $j_\mu A^\mu$ も不変である。そのため，電磁場のエネルギーやラグランジアン，ならびに運動方程式は空間反転に対して不変である。

時間反転

時間反転変換では，時間を逆向きにし空間を不変に保つ。これは座標変換

$$\begin{aligned} x_0 &\to -x_0 \\ x_i &\to x_i \end{aligned} \tag{4.138}$$

で表せる。このとき，電荷の位置や符号は不変であるが速度は反転する。そのため，電荷密度や電流密度は

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x}, x_0) &\to \rho(\boldsymbol{x}, -x_0) \\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, x_0) &\to -\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, -x_0) \end{aligned} \tag{4.139}$$

と変換される。よってマックスウェル方程式から電場や磁場は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, x_0) &\to \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, -x_0) \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, x_0) &\to -\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, -x_0) \end{aligned} \tag{4.140}$$

と変換され，さらにベクトルポテンシャルは

$$\begin{aligned} A_0(\boldsymbol{x}, x_0) &\to A_0(\boldsymbol{x}, -x_0) \\ A_i(\boldsymbol{x}, x_0) &\to -A_i(\boldsymbol{x}, -x_0) \end{aligned} \tag{4.141}$$

と変換される。また電場の 2 乗や磁場の 2 乗は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},x_0)^2 &\to \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},-x_0)^2 \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},x_0)^2 &\to \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},-x_0)^2 \end{aligned} \tag{4.142}$$

と不変であり，また $j_\mu A^\mu$ も不変である。そのため，電磁場のエネルギーやラグランジアン，ならびに運動方程式は時間反転に対しても不変である。

このようにして，通常の電磁気学は時間反転や空間反転に対して不変である。しかし空間反転や時間反転に対して不変でない物理系の電磁気学は，これらの不変性をもたない項で表されるはずである。だからこれらの不変性をもたない項を解析することが必要である。それが次のチャーン・サイモン項である。

問　速度 $\boldsymbol{v}$ の空間反転・時間反転に対する変換性を導け。

4.5 チャーン・サイモンゲージ場

ベクトルポテンシャルからつくるゲージ不変なものとして，$F_{\mu\nu}$ とそのべき関数以外にチャーン・サイモン項，

$$S = \int d^3x \epsilon_{\mu\nu\rho} A_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\rho \tag{4.143}$$

がある。ゲージ変換，

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\lambda(x) \tag{4.144}$$

に対して，チャーン・サイモン作用は

$$L \to \int d^3x \epsilon_{\mu\nu\rho} \left(A_\mu + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\lambda(x) \right) \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\rho \tag{4.145}$$

と変換される。右辺は

$$\int d^3x \epsilon_{\mu\nu\rho} A_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\rho + \int d^3x \frac{\partial}{\partial x_\mu} \epsilon_{\mu\nu\rho} \left(\lambda(x) \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\rho \right) \tag{4.146}$$

と変形され，第 2 項は境界での積分に帰着される。境界がない空間領域では，もちろんこの項はない。そのため，チャーン・サイモン作用は明らかにゲージ不変である。場が従う運動方程式は

$$F_{\mu\nu} = 0 \tag{4.147}$$

と自明なものとなり，解はゲージ変換

$$A_\mu = \partial_\mu \lambda(x) \tag{4.148}$$

と自明なものになる。つまりチャーン・サイモンゲージ系は，自明な解だけをもつ古典力学系である。

チャーン・サイモン作用

$$S = \int d^3x\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho \tag{4.149}$$

は，また一般座標変換

$$\begin{aligned} x_\mu &\to x'_\mu = f_\mu(x) \\ \frac{\partial}{\partial x'_\mu} &= \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} \end{aligned} \tag{4.150}$$

$$A'_\mu = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}A_\nu \tag{4.151}$$

に対して不変である。この性質は，重力理論がもつ一般座標変換不変性をゲージ理論がもつことを示している。

一般座標変換の中で，特にスケール変換

$$x_\mu \to x'_\mu = \lambda x_\mu \tag{4.152}$$

は系のサイズを変えることを意味する。そのため，長距離現象に寄与する項を解析するのに役立つ。スケール変換に対する変換

$$\begin{aligned} d^3x &\to \lambda^3 d^3x \\ A_\mu\partial_\nu A_\rho &\to \lambda^{-3}A_\mu\partial_\nu A_\rho \end{aligned} \tag{4.153}$$

$${F_{\mu\nu}}^2 \to \lambda^{-4}{F_{\mu\nu}}^2 \tag{4.154}$$

より，作用積分は

$$\int d^3x\epsilon_{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho \to \int d^3x\epsilon_{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho \tag{4.155}$$

$$\int d^3x{F_{\mu\nu}}^2 \to \lambda^{-1}\int d^3x{F_{\mu\nu}}^2 \tag{4.156}$$

と変換される。だから $\lambda \to \infty$ で，チャーン・サイモン項は不変であるが，通常のマックスウェル項は0になる。だから，長距離極限ではチャーン・サイモン項が最も重要である。

空間反転や時間反転に対してはチャーン・サイモン項は不変でない。これを空間二次元系で見てみよう。空間反転は

$$\begin{aligned} x_0 &\to x_0 \\ x_1 &\to -x_1 \\ x_2 &\to x_2 \end{aligned} \tag{4.157}$$

と定義され，このときベクトルポテンシャルは

$$\begin{aligned} A_0(x_1,x_2,x_0) &\to A_0(-x_1,x_2,,x_0) \\ A_1(x_1,x_2,x_0) &\to -A_1(-x_1,x_2,x_0) \end{aligned} \tag{4.158}$$

$$A_2(x_1, x_2, x_0) \to A_2(-x_1, x_2, x_0)$$

と変換される。明らかにチャーン・サイモンゲージ項は,

$$\epsilon_{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \to -\epsilon_{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \tag{4.159}$$

と符号を変える。また時間反転は

$$\begin{aligned} x_0 &\to -x_0 \\ x_1 &\to x_1 \\ x_2 &\to x_2 \end{aligned} \tag{4.160}$$

と定義され,このときベクトルポテンシャルは

$$\begin{aligned} A_0(x_1, x_2, x_0) &\to A_0(x_1, x_2, -x_0) \\ A_1(x_1, x_2, x_0) &\to -A_1(x_1, x_2, -x_0) \\ A_2(x_1, x_2, x_0) &\to A_2(x_1, x_2, -x_0) \end{aligned} \tag{4.161}$$

と変換される。だから,チャーン・サイモン項は

$$\epsilon_{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \to -\epsilon_{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \tag{4.162}$$

と符号を変えることがわかる。空間反転や時間反転を破る物理系では,チャーン・サイモン項が現れることがある。

電流がチャーン・サイモンゲージ場と結合しているとき,ラグランジアンは

$$L = \int d^3x \epsilon_{\mu\nu\rho} A_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\rho + j^\mu(x) A_\mu(x) \tag{4.163}$$

である。

4.5.1 時空 3 次元チャーン・サイモン理論

トポロジカルな質量をもつゲージ理論

チャーン・サイモン項はゲージ不変であるが,通常の場の強度 $F_{\mu\nu}$ の 2 乗とは異なり座標での微分が一度現れるだけである。両者で次元が異なるため,両方をもつラグランジアン

$$L = \frac{1}{4} {F_{\mu\nu}}^2 + m\epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho \tag{4.164}$$

は空間反転や時間反転を破るだけでなく,有限な質量をもつ場を表す。チャーン・サイモン項は,ゲージ不変である質量を表すことになる。波動方程式は,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m\epsilon^{\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0 \tag{4.165}$$

であり,

$$({\partial_\mu}^2 g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu + m\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\rho) A_\nu = 0 \tag{4.166}$$

と表すこともできる。この平面波解は

$$A_\mu = e^{ipx}\epsilon(\boldsymbol{p}, s), \quad p_0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \tag{4.167}$$

となる。ここで偏向ベクトルは質量 m の符号が正か負かで異なる。これはチャーン・サイモン項が空間反転対称性を破ることを反映している。

4.5.2 自発分極

有限の自発誘電分極がある系のラグランジアンは

$$L = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E} = P_i(\partial_0 A_i(x) - \partial_i A_0(x)) \tag{4.168}$$

であり，有限の自発磁気分極がある場合は

$$L = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{B} = M_k(\partial_i A_j(x) - \partial_j A_i(x))\epsilon_{ijk} \tag{4.169}$$

となる。これらは電磁場ポテンシャルについて1次であり，前節のチャーン・サイモン項とよく似た形をしている。実際チャーン・サイモン項で化学ポテンシャル項を導入して

$$\begin{aligned} A_0 &\to \mu + A_0 \\ A_i &\to \mu_i + A_i \end{aligned} \tag{4.170}$$

と置き換える際

$$\begin{aligned} \mu &= M_k\epsilon_{ijk} \\ \mu_i &= P_i \end{aligned} \tag{4.171}$$

とおき直すと，自発分極があるときのラグランジアンに一致する。このように，物質中の電磁気学を表すとともに，自発分極がある場合の電磁気学を記述するのに，誘電率や透磁率とともにチャーン・サイモンラグランジアンが有効である。

では，空間反転や時間反転を破りながら自発分極をもたない物理系の電磁気学はどう表せるだろうか? この系に対しても，チャーン・サイモンラグランジアンは長距離領域で有効である。

4.5.3 チャーン・サイモンゲージ場の量子論[2)]

前節のトポロジカルな質量をもつゲージ理論を正準的に扱う。ゲージ場が電流と結合している場合のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^2 + m\epsilon_{\mu\nu\rho}A^\mu\partial^\nu A^\rho + j_\mu A^\mu \tag{4.172}$$

で与えられる。ここでベクトルポテンシャルを力学変数とした正準共役な運動量を求めると

---

2) S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. Lett. **48**, 975 (1982).

$$\Pi_0 = \frac{\partial}{\partial \dot{A}_0} L = 0 \tag{4.173}$$

$$\Pi_j = \frac{\partial}{\partial \dot{A}_j} L = -\partial_j A_0 + \partial_0 A_j + m\epsilon_{0jk} A_k \tag{4.174}$$

となる。第1式の右辺は時間微分を含まない式であり，ゲージ理論特有の束縛条件である。ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \Pi_0 \dot{A}_0 + \Pi_j \dot{A}_j - L \\ &= \Pi_j(\Pi_j + \partial_j A_0 - m\epsilon_{0jk} A_k) - L \\ &= \frac{1}{2}{\Pi_j}^2 + \frac{1}{2}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)^2 + \Pi_j \partial_j A_0 - m\epsilon_{0ij} A_0 \partial_i A_j + \frac{1}{2} m^2 \epsilon_{0jk} {A_k}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m^2 \epsilon_{0jk} {A_k}^2 - j^\mu A_\mu \end{aligned} \tag{4.175}$$

となる。このハミルトニアンから，上記第1式の時間微分が

$$\begin{aligned} \partial_0 \Pi_0 &= \{H, \Pi_0\}_{PB} \\ &= \partial_j \Pi_j + m\epsilon_{ojk} \partial_j A_k + j_0 = 0 \end{aligned} \tag{4.176}$$

となる。これも力学変数が満たす束縛条件である。束縛条件をまとめて，

$$\Phi_1 = \Pi_0 \tag{4.177}$$

$$\Phi_2 = \partial_j \Pi_j + m\epsilon_{ojk} \partial_j A_k + j_0 \tag{4.178}$$

とおく。これらは代数，

$$\{\Phi_1(x), \Phi_1(y)\}_{PB} = 0 \tag{4.179}$$

$$\{\Phi_1(x), \Phi_2(y)\}_{PB} = 0 \tag{4.180}$$

$$\{\Phi_2(x), \Phi_2(y)\}_{PB} = m\epsilon_{ojk} \partial_j \partial_k \delta(x-y) = 0 \tag{4.181}$$

を満たしていて，通常のゲージ理論と同じ代数となる。束縛条件に対応するゲージ固定条件を適当に選び量子化が行える。次の標準的なゲージ固定条件，

$$X_1 = A_0 = 0 \tag{4.182}$$

$$X_2 = \partial_j A_j = 0 \tag{4.183}$$

を課すと，束縛条件との間に関係式，

$$\{X_i, X_j\}_{PB} = 0 \tag{4.184}$$

$$\{\Phi_1, X_1\}_{PB} = -\delta(x-y) \tag{4.185}$$

$$\{\Phi_1, X_2\}_{PB} = 0 \tag{4.186}$$

$$\{\Phi_2, X_1\}_{PB} = 0 \tag{4.187}$$

$$\{\Phi_2, X_2\}_{PB} = -{\partial_j}^2 \delta(x-y) \tag{4.188}$$

が成立する。

4.6 カシミア効果

真空中の電磁場の零点エネルギーは

$$E_0 = \frac{1}{2}\int d^3pc|\boldsymbol{p}| \tag{4.189}$$

で与えられる。真空の零点エネルギーは，エネルギーの基準をどう設定するかにより変わるものであり，通常は実験で測定される物理量には無関係である。そのため，積分領域が無限領域であるため生じる発散する零点エネルギーは，なんらの問題になるわけではない。この章では，逆に真空の零点エネルギーが観測量と結びつく状況を考察する。

電磁場が値をもつ空間の領域が，無限領域ではなく有限領域であるときの零点エネルギーを求める。この場合，場がとりうる運動量の値が無限領域の場合とは異なる。このため，零点エネルギーの値も真空の値とは有限量だけ異なる。このエネルギーの差が観測可能となるものであれば，直接電磁場の量子効果が見える。このような特殊な空間領域の一つは，平行な平面金属で囲まれた空間領域である。金属内には長い波長の電磁波は入れない。だから，この波長の電磁波は，平面金属で囲まれた空間領域で境界条件を課される。境界条件を満たす運動量は，とびとびの値をとり，無限領域での連続な値とは異なる。これが，零点エネルギーに寄与する。

古典電磁気学では，中性の金属板の間には力は働かない。ところが場の量子論では，電磁場の零点エネルギーが領域の間隔に依存することになり，この零点エネルギーが面間距離依存性をもつ。この結果，金属間に力が働く。この効果をカシミア効果といい，この量子的な力をカシミア力という。カシミア力は，金属間の場の量子論的な力である。理想的に，金属境界で電磁場が完全反射するとしてカシミア効果を求めよう。じつはこの仮定が成り立つのは波数が小さいときだけである。また，中性金属といえども内部で電荷が分布していることは多い。実験値と理論値を比較する場合には，これらについての注意深い考察が本来なされなければならない。しかし本書の性格上，ここではこれらを無視する。第一近似として，すべての波数の電磁波成分が境界で完全反射すると仮定して計算しよう。

z 方向の間隔が d である領域では n_z を整数として運動量の z 成分が

$$p_z = \frac{2\pi}{d}n_z \tag{4.190}$$

で与えられる。よって零点エネルギーは

$$E_0(d) = \frac{1}{2}\sum_{n_z}\int dp_x dp_y c|\boldsymbol{p}| \tag{4.191}$$

$$|\boldsymbol{p}| = ({p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2)^{1/2} \tag{4.192}$$

となる。このエネルギーは明らかに発散する。しかし大きな間隔 D でのエネルギーとの差，

$$\delta E_0(d) = E_0(d) - E_0(D) \tag{4.193}$$

については有限な値が求まる。結構計算は面倒であるが，和と積分に関するオイラー・マクローリンの公式を使い D が十分大きいとき，単位面積あたりのエネルギー差は

$$\frac{\delta E_0(d)}{L^2} = -\hbar c\frac{\pi^2}{720}\cdot\frac{1}{d^3} \tag{4.194}$$

となる。これより，二つの金属間に働く力は

$$F = \frac{\partial}{\partial d}E(d) = \hbar c\frac{\pi^2}{240}\cdot\frac{1}{d^4} \tag{4.195}$$

の引力として与えられる。Casimir により求められたのでカシミア効果とよばれる。

より複雑な境界条件では計算が容易ではない。また同様な計算を電荷をもたない二つの導体間で計算するとヴァンデルワールス力が求まる。これらは，電磁場の零点エネルギーに対する，有限サイズ効果である。

オイラー・マクローリン公式

$$\frac{1}{2}F(0) + \sum_{n=1}^{n=\infty} F(n) - \int_0^\infty dnF(n) = \frac{B_1}{2}(-F^{(1)}(0)) - \frac{B_2}{4!}(-F^{(3)}(0)) + \cdots \tag{4.196}$$

ただし，B_n はベルヌーイ数であり $F^{(n)}(\infty)$ は 0 であるとする。

4.7 黒体輻射

有限温度の下にある物質は電磁波や光を放射する。熱した金属が温度に応じて色を変えることはよく知られている。この現象を考察する。有限温度下にある電磁場系は，温度に応じた分布の光で満たされる。物体を熱く熱したときに放射される光や，内部が黒く塗られた箱を熱したときに箱の内部にある光を求めよう。

熱力学では対象とする物理系は，外部との間で弱い相関をもつ。外部との相関がなければ，定常状態すなわちハミルトニアンの固有状態は，他の状態に変

わらない。一方，外部との弱い相互作用があるときは，状態は他の異なる状態に変化する。状態間の遷移が何度も起きる場合は，様々な状態が同等に平均的に寄与する。その結果，状態数に応じた振る舞いが観測される。

温度 T の熱平衡状態では，状態の分布は

$$\rho = \exp(-\beta H) \tag{4.197}$$

$$\beta = \frac{1}{kT} \tag{4.198}$$

で決まる。

すべての固有状態が近似的に良い状態として実現し，外部との弱い相互作用のため状態間の遷移が適度にあるときに，上の分布が実現する。このため，有限温度のもとでは，分配関数から光子数の平均値や様々な熱力学量が求まる。分配関数は

$$Z = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}) = \sum_n e^{-\beta E(\boldsymbol{p})n} = \int DA_\mu \exp\left(\int dx L_E\right) \tag{4.199}$$

$$L_E = \frac{1}{4}{F_{\mu\nu}}^2 \tag{4.200}$$

である。光子と物質との相互作用や光子間相互作用を無視して，光子の運動量 $\boldsymbol{p}$ のモードに着目しよう。ハミルトニアンは，

$$H(\boldsymbol{p}) = E(\boldsymbol{p})(n(\boldsymbol{p}) + 1/2) \tag{4.201}$$

$$E(\boldsymbol{p}) = cp, \quad n(\boldsymbol{p}) = a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) \tag{4.202}$$

であるので，分配関数は

$$\begin{aligned} Z(\boldsymbol{p}) = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H(\boldsymbol{p})}) &= \sum_n e^{-\beta E(\boldsymbol{p})n} \\ &= e^{-\beta E(\boldsymbol{p})/2}\frac{1}{1-x} \end{aligned} \tag{4.203}$$

$$x = e^{-\beta E(\boldsymbol{p})} \tag{4.204}$$

となる。また粒子数の期待値は

$$\langle n(\boldsymbol{p})\rangle = \sum_n n e^{-\beta E(\boldsymbol{p})n} \Big/ \sum_n e^{-\beta E(\boldsymbol{p})n} = \frac{x}{1-x} \tag{4.205}$$

と与えられ (図 4.2)，粒子数の 2 乗の期待値は

$$\langle n(\boldsymbol{p})^2\rangle = \sum_n n^2 e^{-\beta E(\boldsymbol{p})n} \Big/ \sum_n e^{-\beta E(\boldsymbol{p})n} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^2} \tag{4.206}$$

と与えられる。よって，粒子数相関は

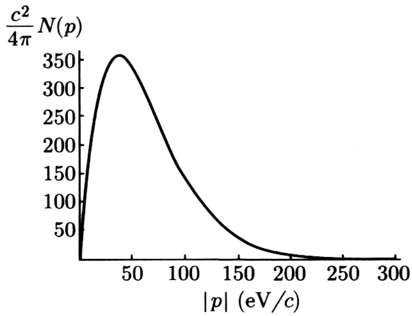


図 4.2 粒子数の平均

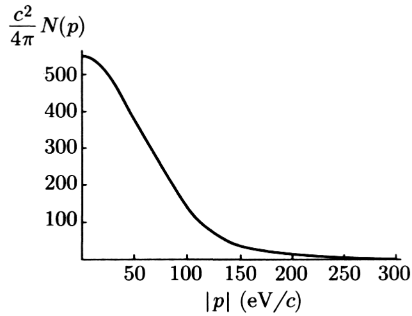


図 4.3 粒子数相関 ($T = 2.73$ K)

$$\langle n(\boldsymbol{p})^2\rangle - \langle n(\boldsymbol{p})\rangle^2 = \frac{x(1+x)}{(1-x)^2} - \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 = \frac{x}{(1-x)^2} \tag{4.207}$$

となる (図 4.3)。

4.8 物質との相互作用

電流があるときは，相互作用項

$$\int d^3x j_\mu(x) A^\mu(x) \tag{4.208}$$

がラグランジアンに加わる。電流演算子が他の電荷をもつ物質場からなる理論は後で調べられるので，ここでは電流演算子が c 数である場合を記述する。

ラグランジアン

$$L = -\frac{1}{4}{F_{\mu\nu}}^2 + j_\mu A^\mu \tag{4.209}$$

には，ベクトルポテンシャル A_0 の時間微分は含まれないので，A_0 に共役な運動量は恒等的に 0 となる。

$$\Pi_0(x) = 0 \tag{4.210}$$

これは拘束条件の一つである。A_i に共役な運動量は，

$$\Pi(x) = \frac{\partial}{\partial \dot{A}_i(x)} L = \dot{A}_i(x) - \nabla_i A_0(x) \tag{4.211}$$

となる。これより，

$$\dot{A}_i(x) = \Pi(x) + \nabla_i A_0(x) \tag{4.212}$$

となり，ハミルトニアンは，

$$H=\int d^3x\Pi(x)\dot{A}_i(x)-\int d^3xL \tag{4.213}$$
$$=\int d\boldsymbol{x}\biggl(\frac{1}{2}\Pi_i(x)^2+\frac{1}{2}(\partial_iA_j-\partial_jA_i)^2+A_0(x)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(x)-\rho(x))$$
$$+j_i(x)A_i(x)\biggr)$$

である。ハミルトニアンよりこの拘束条件の時間微分が,

$$\dot{\Pi}_0(x)=\{\Pi_0(x),H\}=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(x)+\rho(x) \tag{4.214}$$

と求まる。このように，新たな拘束条件であるガウスの条件式

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(x)-\rho(x)=0 \tag{4.215}$$

が導かれる。相互作用のために，電場の縦波成分は電荷密度で決められる。電場を縦波成分と横波成分に,

$$\boldsymbol{E}(x)=\boldsymbol{E}^{(L)}(x)+\boldsymbol{E}^{(T)}(x) \tag{4.216}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}^{(T)}(x)=0 \tag{4.217}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}^{(L)}(x)=0 \tag{4.218}$$

と分解する。縦波成分は

$$\boldsymbol{E}^{(L)}(x)=\boldsymbol{\nabla}\phi(x) \tag{4.219}$$
$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi(x)=\rho(x) \tag{4.220}$$
$$\phi(x)=\frac{1}{4\pi}\int d^y\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\rho(y) \tag{4.221}$$

と電荷密度から決まり，横波成分は電流がない場合と同じになる。これより,

$$\int d^3x\,\frac{1}{2}\boldsymbol{E}(x)^2$$
$$=\int d^3x\,\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{(T)}(x)^2+\int d^3x\,\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{(L)}(x)^2+\int d^3x\,\boldsymbol{E}^{(T)}(x)\boldsymbol{E}^{(L)}(x)$$
$$=\int d^3x\,\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{(T)}(x)^2+\int d^3xd^3y\,\frac{1}{2}\rho(x)\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\rho(y) \tag{4.222}$$

となる。上の式で,

$$\int d^3x\,\boldsymbol{E}^{(T)}(x)\boldsymbol{E}^{(L)}(x)=\int d^3x\,\boldsymbol{E}^{(T)}(x)\boldsymbol{\nabla}\phi(x)$$
$$=\int d^3x\,\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{E}^{(T)}(x)\phi(x))=0 \tag{4.223}$$

を使った。

4.8.1 共変的なゲージ固定

ここまでのゲージ固定は，明白なローレンツ共変性をもたない。物質場との相互作用を扱うためには，明白なローレンツ共変性があるほうがよい。ローレンツ共変なゲージ固定の一つは，ラグランジアンに共変的なゲージ固定項を足して，

$$L = -\frac{1}{4}{F_{\mu\nu}}^2 + \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{4.224}$$

を使うことである。ここで α は任意な実数値をとるパラメーターである。

問 題 4

4.1 式 (4.121) を証明せよ。

4.2 電磁場が有限の間隔 $0 \leq z \leq a$ 内にあるときの電磁場の零点エネルギーを求め，全空間で定義された通常の真空の電磁場の零点エネルギーとの差を求めよ。

4.3 物質中で光子が，有限質量をもつ場合や誘電率や透磁率をもつ場合の光子の波束の漸近形や干渉パターンを求めよ。

4.4 誘電率や透磁率の差により生ずる干渉を論ぜよ。

4.5 式 (4.165) を使い (4.166) と (4.167) が成り立つことを示せ。

4.6 3 章で古典的に求めた荷電粒子の運動による電磁波の放射を，外部電流と結合する光子場の計算から求めよ。なぜチェレンコフ放射が起きるのか，エネルギー運動量の保存則から論ぜよ。

4.7 式 (4.167) の分極ベクトルを求めよ。質量が m と $-m$ でどのように異なるか?

4.8 拘束条件が満たす関係式 (4.180)，(4.181) を証明せよ。

5章 電子場

電子は原子を構成する一つであり，物質の一つである。電子は，古典物理学では粒子として扱われるが，ミクロな世界では波として振る舞う。電子を波として扱うには，電子を場で表現することが必要である。電子場は，最も代表的な物質場である。

電子は原子核とともに原子の構成要素である。原子核は重く，動きにくく，原子内で小さい領域を占める。対照的に，電子は軽く，動きやすく，原子内で大きな領域を占めている。このため，原子がたくさん集まって形成されている多くの物質の性質は，電子で決まることが多い。特に，自由に動き回ることができる多くの電子をもつ金属は，超伝導や強磁性等の興味深い性質を示す。このような性質は，多電子系が示す物理として理解できる。だから多電子系の物理は，多くの物質の性質を解明する問題でもある。

物質中で自由に動く電子は，原子核により形成された周期的なポテンシャルの影響を受けている。周期ポテンシャル下のシュレーディンガー方程式の解は，バンド構造をなす。このように，物質中の電子は物質を構成する原子の影響を受けるので真空中とは異なる多くの性質をもつ。

近年自然に形成された物質だけでなく，人工的にたくさんの物質がつくられてきた。物質の多様な性質が解明され，さらに新たな応用が探られている。物質中の電子の振る舞いから，物質の性質を解明するのは物性物理学に属する事柄である。ここでは真空中の非相対論的電子系や物質中の電子系に適用される基本的な方法を述べる。

5.1 非相対論的電子の量子化

5.1.1 電子場の作用積分

ポテンシャル中にある一つの非相対論的電子が満たす方程式はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\boldsymbol{x}) = H_0\psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{5.1}$$

$$H_0 = \frac{(-i\hbar)^2}{2m}\triangle + V(\boldsymbol{x}) \tag{5.2}$$

であり，時間について 1 次の方程式である。シュレーディンガー方程式は，電子の座標と運動量を量子力学で取り扱うことにより得られた。ここでは，さらに電子場 $\psi(t,\boldsymbol{x})$ を力学変数として量子化する。そのため，電子場の量子化は第二量子化とよばれることもある。電子場が満たすのは，時間について 1 次方程式である。そのため電子場の量子化は，時間について 2 次方程式であるニュートン方程式やスカラー場や電磁場の量子化とは大きく異なる。

上のシュレーディンガー方程式で，質量 m は真空中では $0.5\ \mathrm{MeV}/c^2$ であるが，物質中では結晶格子の周期ポテンシャルの影響で真空中の値とは異なる。また，エネルギー分散が球対称関数からずれることや，運動量について周期的になることもある。さらに，スピンの自由度や複数のバンドからの効果が，重要になる場合も多い。これら多様な性質をもつ場が相互作用することにより，多くの異なる相が発現する。

本章では，おもに単純な 2 次分散に従う球対称エネルギーをもち，スピンや複数バンドをもたない最も簡単な電子系を考察する。この電子場を力学変数とし，場が従うシュレーディンガー方程式を導くラグランジアンや作用は，

$$L = \int d^3x\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x})\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right]\psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{5.3}$$

$$S = \int dtL \tag{5.4}$$

である。まず変分原理からこれを確認しよう。場を微小に変化させたときの作用の変分は，

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x(\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x}) + \delta\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x}))\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right](\psi(t,\boldsymbol{x}) + \delta\psi(t,\boldsymbol{x})) \\ &\quad - \int d^4x\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x})\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right]\psi(t,\boldsymbol{x}) \\ &= \int d^4x(\delta\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x}))\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right](\psi(t,\boldsymbol{x}))\end{aligned}$$

$$+\int d^4x(\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x}))\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H\right]\delta\psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{5.5}$$

である。右辺の第2項を部分積分で書き直して，

$$\delta S=\int d^4x(\delta\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x}))\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H\right](\psi(t,\boldsymbol{x}))$$
$$+\int d^4x\left(\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H\right]\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x})\right)\delta\psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{5.6}$$

と表す。よって作用が停留的であるとする変分原理から，波動方程式

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H\right]\psi(t,\boldsymbol{x})=0 \tag{5.7}$$

$$\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H\right]\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x})=0 \tag{5.8}$$

が得られる。これは式 (5.1) のシュレーディンガー方程式である。だから式 (5.3) のラグランジアンから得られるオイラー・ラグランジュ方程式は，シュレーディンガー方程式 (5.1) に一致することがわかる。

5.1.2　正準反交換関係

ラグランジアンから $\psi(x)$ の正準共役量が

$$\pi(t,\boldsymbol{x})=\frac{\partial}{\partial\dot{\psi}(t,\boldsymbol{x})}L=i\hbar\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x}) \tag{5.9}$$

と求まり，力学変数間の交換関係が決まる。もしも電子場とその共役量間にニュートン力学系の通常の交換関係を設定すると，1自由度あたり無限個の独立なベクトルが空間を張る。これは，無限次元表現に対応する。またスカラー場の章で見たように，同種粒子は対称波動関数で記述されるボース・アインシュタイン統計に従う。しかし，電子の多体系は，反対称の波動関数で表されるフェルミ・ディラック統計に従う。これは1自由度あたり2次元表現に対応する。だから上の交換関係ではまずい。このため，電子場に反交換関係

$$\{\psi(t,\boldsymbol{x}),\psi^\dagger(t',\boldsymbol{x}')\}\delta(t-t')=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(t-t') \tag{5.10}$$

$$\{\psi(t,\boldsymbol{x}),\psi(t',\boldsymbol{x}')\}=0 \tag{5.11}$$

$$\{\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x}),\psi^\dagger(t',\boldsymbol{x}')\}=0 \tag{5.12}$$

を設定する。反交換関係は，

$$\{A,B\}=AB+BA \tag{5.13}$$

と定義される。電子場が反交換関係を満たすことより，多体電子波動関数は反対称関数となる。

多体ハミルトニアンは,

$$H = \int d^3x\, i\hbar\psi^\dagger(x)\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) - L$$
$$= \int d^3x\, \psi^\dagger(x)\left(\frac{(-i\hbar)^2}{2m}\triangle + V(\boldsymbol{x})\right)\psi(x) \tag{5.14}$$

である。これから導かれる場に対するハイゼンベルグ運動方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = [H, \psi(x)] \tag{5.15}$$

はシュレーディンガー方程式 (5.1) に一致する。だから，電子場に対して反交換関係を使うことで量子化が行えた。

5.2 多体電子系とフォック空間：フェルミ・ディラック統計

電子場，$\psi(x)$ は空間の各点で独立な値をとり，シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\boldsymbol{x}) = \left(\frac{(-i\hbar)^2}{2m}\triangle + V(\boldsymbol{x})\right)\psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{5.16}$$

に従い時間発展する多体空間の演算子である。座標 $\boldsymbol{x}$ が連続的に変わる変数であるため，$\boldsymbol{x}$ の関数である場を扱うのは容易ではない。場 $\psi(x)$ よりもこの場を直交完全系 $u_\alpha(\boldsymbol{x})$ で

$$\psi(x) = \sum a_\alpha(t)u_\alpha(\boldsymbol{x}) \tag{5.17}$$
$$\psi^\dagger(x) = \sum a_\alpha^\dagger(t)\overline{u}_\alpha(\boldsymbol{x}) \tag{5.18}$$

と展開して得られる展開係数を演算子として取り扱うほうがやさしい。場の交換関係から展開係数が満たす交換関係は

$$\{a_\alpha(t), a_{\alpha'}^\dagger(t)\} = \delta_{\alpha\alpha'} \tag{5.19}$$
$$\{a_\alpha(t), a_{\alpha'}(t)\} = 0 \tag{5.20}$$
$$\{a_\alpha^\dagger(t), a_{\alpha'}^\dagger(t)\} = 0 \tag{5.21}$$

と得られる。さらに展開の基底関数が一体ハミルトニアンの固有状態であり

$$\left(\frac{(-i\hbar)^2}{2m}\triangle + V(\boldsymbol{x})\right)u_\alpha(x) = E_\alpha u_\alpha(x) \tag{5.22}$$

を満たすとき，多体ハミルトニアン

$$H = \int d^3x\, \psi^\dagger(x)\left(\frac{(-i\hbar)^2}{2m}\triangle + V(\boldsymbol{x})\right)\psi(x) \tag{5.23}$$

は

$$H = \sum_\alpha E_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha \tag{5.24}$$

と対角形になる。今の場合 $E_\alpha \geq 0$ とする。このとき多体ハミルトニアンの基底状態 $|0\rangle$ はすべてのモードに対して，

$$a_\alpha|0\rangle = 0 \tag{5.25}$$

を満たす状態であり，他の固有状態は，生成演算子をかけた状態

$$a^\dagger_{\alpha_1} a^\dagger_{\alpha_2} \cdots a^\dagger_{\alpha_n}|0\rangle \tag{5.26}$$

で表せる。ここで反交換関係から上式では同じ状態は二度現れずパウリの排他律が満たされる。だから，$\alpha_i \neq \alpha_j$ であり，エネルギー固有値は

$$E = \sum_i E_{\alpha_i} \tag{5.27}$$

となる。

5.2.1 自由場

自由場の場合は $V = 0$ であり座標の平行移動に対する不変性が成り立ち，平面波が一体の固有状態となる。そのため，場のフーリエ変換，

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}}(\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})a(\boldsymbol{k}, t)) \tag{5.28}$$

$$\psi^\dagger(\boldsymbol{x}, t) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}}(\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})a^\dagger(\boldsymbol{k}, t)) \tag{5.29}$$

で得られる演算子は，交換関係

$$\{a(\boldsymbol{k}_1, t_1), a^\dagger(\boldsymbol{k}_2, t_2)\}\delta(t_1 - t_2) = \delta(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)\delta(t_1 - t_2) \tag{5.30}$$

$$\{a(\boldsymbol{k}_1, t_1), a(\boldsymbol{k}_2, t_2)\}\delta(t_1 - t_2) = 0 \tag{5.31}$$

$$\{a^\dagger(\boldsymbol{k}_1, t_1), a(\boldsymbol{k}_2, t_2)\}\delta(t_1 - t_2) = 0 \tag{5.32}$$

を満たす。多体定常状態は真空状態 $|0\rangle$ と生成演算子 $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ から

$$a(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0 \tag{5.33}$$

$$|\boldsymbol{k}\rangle = a^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle \tag{5.34}$$

$$|\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n\rangle = \prod_{l=1}^{l=n} a^\dagger(\boldsymbol{k}_l)|0\rangle \tag{5.35}$$

と構成される。このように構成された状態をフォック空間とよぶ。フォック空間の要素である状態はハミルトニアン

$$H = \int d^3x\, \psi^\dagger(x)\left(\frac{(-i\hbar)^2}{2m}\triangle\right)\psi(x) = \int d^3p\, E(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) \tag{5.36}$$

$$E(\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{5.37}$$

の固有状態であること，すなわち以下の関係式

$$H|0\rangle = 0 \tag{5.38}$$

$$H|\boldsymbol{k}\rangle = E(\boldsymbol{k})|\boldsymbol{k}\rangle \tag{5.39}$$

$$H|\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n\rangle = \sum_{l=1}^{l=n} E(\boldsymbol{k}_l)|\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n\rangle \tag{5.40}$$

が満たされることが容易にわかる。ここで交換関係 (5.30), (5.31), (5.32) を使った。これらの状態は多体空間でのシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = E\Psi \tag{5.41}$$

に従い時間発展する。その結果，任意の時刻で位相だけが時間とともに，$e^{-iE/\hbar t}$ と変化する定常状態になっている。

状態 $|0\rangle$ は真空状態，$|\boldsymbol{k}\rangle$ は一電子状態，$|\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2\rangle$ は二電子状態などの多電子状態を表す。これらは，決まったエネルギーの値をもつ定常状態である。自由場の系では平行移動に対する不変性があるので，エネルギーに加えて運動量が保存される。

電子場が担う四元運動量演算子はまとめて

$$P_0 = \int d^3x\, \psi^\dagger(x)\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\psi(x) \tag{5.42}$$

$$P_i = \int d^3x\, \psi^\dagger(x)(p_i)\psi(x) \tag{5.43}$$

と表される。よってフーリエ表示を代入すると，

$$P^0 = \int d^3p\, \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) \tag{5.44}$$

$$P^i = \int d^3p\, p^i a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) \tag{5.45}$$

となる。さらに反交換関係 (5.30), (5.31), (5.32) を使うことにより，状態ベクトル (5.33), (5.34), (5.35) はエネルギーだけでなく運動量が

$$P^i|0\rangle = 0 \tag{5.46}$$

$$P^i|\boldsymbol{k}\rangle = k^i|\boldsymbol{k}\rangle \tag{5.47}$$

$$P^i|\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n\rangle = \sum_{l=1}^{l=n}({k_l}^i)|\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n\rangle \tag{5.48}$$

と決まった値となっていることがわかる。任意の数の生成演算子をかけた状態は，やはりエネルギーと運動量の同時固有状態になっている。

電子の数が異なる物理状態を系統的に記述するには，異なる電子数の状態ベクトルを含む大きなヒルベルト空間が構成されていることが必要である。電子

場を量子化することで，電子数を変える演算子が導入され，異なる電子数のベクトルからなる大きなベクトル空間がつくられた。運動方程式や散乱振幅もこの大きな空間で計算される。

反交換関係 (5.30), (5.31), (5.32) は，このようにつくられた多粒子状態が粒子の交換に関して反対称な波動関数で表されるフェルミ統計を導く。この点を見るのに，場の演算子で座標についての N 体波動関数を定義し，これを調べるのが都合がよい。次の N 体波動関数，

$$\Psi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\cdots,\boldsymbol{x}_N) = \langle 0|\psi(\boldsymbol{x}_1)\psi(\boldsymbol{x}_2)\psi(\boldsymbol{x}_3)\cdots\psi(\boldsymbol{x}_N)|\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3,\cdots,\boldsymbol{k}_N|\rangle \tag{5.49}$$

を考えよう。この関数 $\Psi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\cdots,\boldsymbol{x}_N)$ は，局所場の演算子を多体状態と真空状態で挟んだものである。そのため，N 体状態を座標表示したものであり，二つの任意の座標 $\boldsymbol{x}_i$ と $\boldsymbol{x}_j$ の交換に関して明らかに反対称関数になっている。すべての変数に対して反対称であるため，$\Psi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\cdots,\boldsymbol{x}_N)$ は行列式，

$$\det(e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}_1}, e^{i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}_2}, e^{i\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{x}_3},\cdots, e^{i\boldsymbol{k}_N\cdot\boldsymbol{x}_N}) \tag{5.50}$$

に一致する。

5.2.2 相互作用する場

電子間に相互作用がある系では，ハミルトニアン H は場の 2 次式である自由ハミルトニアン H_0 と，場の高次式である相互作用ハミルトニアン H_1 からなり，

$$H = H_0 + H_1 \tag{5.51}$$

と表せる。この場合，相互作用のために定常状態を求めることは困難である。一方，散乱をはじめとする様々な物理現象が起こる。

この節で，相互作用表示に基づく摂動展開について簡単に述べる。この方法は，相対論的に不変な系における摂動展開において特に強力であり，次章の量子電気力学 (QED) で適用される。時間に依存する摂動展開は，ハミルトニアンの固有値方程式に関する摂動展開とは異なり，多体波動関数，散乱振幅やグリーン関数，ならびに分配関数等の諸熱力学量等の系統的な計算に使われる。フェルミ場の経路積分を使う方法でも，同等な摂動計算が行われる。

相互作用表示では演算子は自由ハミルトニアン H_0 で，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = [H_0, \psi(x)] \tag{5.52}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}O(x) = [H_0, O(x)] \tag{5.53}$$

と時間発展する。電子場は，自由なハミルトニアンで時間発展するため，自由場の波動方程式

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\frac{(-i\hbar)^2}{2m}\triangle\right)\psi(t,\boldsymbol{x})=0 \tag{5.54}$$

を満たす。方程式は，簡単に解くことができ，フーリエ展開

$$\psi(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\exp\left(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\frac{E(\boldsymbol{k})}{\hbar}t\right)a(\boldsymbol{k}) \tag{5.55}$$

$$\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\exp\left(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\frac{E(\boldsymbol{x})}{\hbar}t\right)a^\dagger(\boldsymbol{k}) \tag{5.56}$$

で表される。

一方，状態ベクトルは相互作用ハミルトニアン H_1 で

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle=H_1(x)|\Psi\rangle \tag{5.57}$$

と時間発展する。$\psi(x),\psi^\dagger(x)$ で書かれた H_1 は時間に依存するので，この微分方程式は H_1 について展開した形，

$$|\Psi(t,\boldsymbol{x})\rangle=U(t,t_0)|\Psi(t_0,\boldsymbol{x})\rangle \tag{5.58}$$

$$U(t,t_0)=1+\int_{t_0}^{t}dt_1\frac{H_1(t_1)}{i\hbar}+\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\frac{H_1(t_1)}{i\hbar}\frac{H_1(t_2)}{i\hbar}+\cdots$$
$$+\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_n\frac{H_1(t_1)}{i\hbar}\frac{H_1(t_2)}{i\hbar}\frac{H_1(t_3)}{i\hbar}\cdots\frac{H_1(t_n)}{i\hbar}+\cdots$$

$$U(t_0,t_0)=1$$

で解かれる。様々な振幅や，散乱振幅はこの状態ベクトルによる行列要素として求まる。

5.2.3 経路積分

経路積分法をフェルミ場に適用するには，反可換な c 数場 $\eta(x),\overline{\eta}(x)$ を導入することが必要である。反可換な c 数場は反可換な関係式

$$\eta(x)\eta(y)=-\eta(y)\eta(x) \tag{5.59}$$

$$\eta(x)\overline{\eta}(y)=-\overline{\eta}(y)\eta(x) \tag{5.60}$$

$$\overline{\eta}(x)\overline{\eta}(y)=-\overline{\eta}(y)\overline{\eta}(x) \tag{5.61}$$

を満たし，微分や積分が

$$\int d\eta(x)\eta(x)=1 \tag{5.62}$$

$$\int d\overline{\eta}(x)\overline{\eta}(x)=1 \tag{5.63}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta(x)}\eta(y) = \delta(x-y) \tag{5.64}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{\eta}(x)}\overline{\eta}(y) = \delta(x-y) \tag{5.65}$$

と定義される。フェルミ場のコヒーレント状態は，反可換場 $\psi(x), \psi^{\dagger}(x)$ の固有状態

$$\psi(x)|\eta(x)\rangle = \eta(x)|\eta(x)\rangle \tag{5.66}$$

$$\langle\eta(x)|\psi^{\dagger}(x) = \langle\eta(x)|\overline{\eta}(x) \tag{5.67}$$

である。

反可換な c 数場を使い電子系の分配関数が，経路積分で

$$Z = \int \prod d\eta(x) d\overline{\eta}(x) \exp\left(-\int d^4x\, L_E(x)\right) \tag{5.68}$$

$$L_E(x) = \overline{\eta}(x)\left(i\frac{d}{d\tau} - \frac{\nabla^2}{2m}\eta(x) + L_{\text{int}}(\eta(x), \overline{\eta}(x))\right) \tag{5.69}$$

と計算される。ところで，反可換な c 数場の積分変数としていかなる記号を使ってもよい。そのため，$\eta(x), \overline{\eta}(x)$ のかわりに $\psi(x), \overline{\psi}(x)$ を使うことにしよう。すると，分配関数は

$$Z = \int \prod d\psi(x) d\overline{\psi}(x) \exp\left(-\int d^4x\, L_E(x)\right) \tag{5.70}$$

$$L_E(x) = \overline{\psi}(x)\left(i\frac{d}{d\tau} - \frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{2m}\right)\psi(x) + L_{\text{int}}(\psi(x), \overline{\psi}(x)) \tag{5.71}$$

と表される。経路積分の変数としての $\psi(x), \overline{\psi}(x)$ は反交換関係を満たす場の演算子ではなく，反可換な c 数である。

5.3 電子ガス

電子は電荷をもつので，電荷密度間にはクーロン力による相互作用

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} &= \int d^3x d^3y\, \frac{1}{2}\rho(x)V(x-y)\rho(y) \\ &= \int d^3x d^3y\, \frac{1}{2}\psi^{\dagger}(x)\psi^{\dagger}(y)V(x-y)\psi(y)\psi(x) \end{aligned} \tag{5.72}$$

$$V(x-y) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{5.73}$$

が働く。ところで，物質内では電子とともに正電荷を帯びたイオンがあり，全体で電気的に中性になっている。イオンは金属では，ほぼ均一に分布しまた動

かない。そのため良い近似で正電荷が一様に分布しているとみなせ，電子からの負電荷を打ち消している。そこで，相互作用ハミルトニアンは，

$$H_{\rm int} = \int d^3x d^3y \, \frac{1}{2}(\rho(x) - \rho_0)V(x-y)(\rho(y) - \rho_0) \tag{5.74}$$

となる。フーリエ変換した運動量表示では，相互作用ハミルトニアンは，

$$\begin{aligned} H_{\rm int} &= \int_{\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{0}} d^3k \, \frac{1}{2} : \rho(\boldsymbol{k})V(\boldsymbol{k})\rho(-\boldsymbol{k}) : \\ &= \int d^3k d^3p_1 d^3p_2 \, a^\dagger(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{k})\frac{1}{2}V(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{p}_2)a(\boldsymbol{p}_1) \end{aligned} \tag{5.75}$$

$$\rho(\boldsymbol{k}) = \int d^3p \, a^\dagger(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{p}) \tag{5.76}$$

と表せる。イオンからの一様な正電荷を反映して，積分領域から $\boldsymbol{k}=0$ が除外されていることに注意が必要である。電子ガスの全ハミルトニアンは運動エネルギー項と相互作用項の和

$$H = H_0 + H_{\rm int} \tag{5.77}$$

である。以下この電子ガスの性質を調べる。

5.3.1 エネルギー期待値

まず二電子系の相互作用エネルギーの期待値を調べよう。

二体状態

$$a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle \tag{5.78}$$

の相互作用エネルギーの期待値は

$$\begin{aligned} &\langle 0|a(\boldsymbol{p}_2)a(\boldsymbol{p}_1) : H : a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle \\ &= \left\langle 0 \middle| a(\boldsymbol{p}_2)a(\boldsymbol{p}_1) \int_{\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{0}} d^3k d^3q_1 d^3q_2 \, a^\dagger(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{k}) \right. \\ &\qquad \left. \times \frac{V(\boldsymbol{k})}{2} a(\boldsymbol{q}_2)a(\boldsymbol{q}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2) \middle| 0 \right\rangle \\ &= \int_{\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{0}} d^3k d^3q_1 d^3q_2 \frac{V(\boldsymbol{k})}{2} \Big(\delta(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_2)\delta(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_1) \\ &\quad - \delta(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_1)\delta(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_2)\Big)\Big(\delta(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{p}_2)\delta(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_1) \\ &\quad - \delta(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{p}_1)\delta(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_2)\Big) \end{aligned} \tag{5.79}$$

となる。デルタ関数を使い積分を計算して，

$$\langle \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2| : H : |\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\rangle = -\delta(0)V(|\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2|) \tag{5.80}$$

が得られる。$\delta(0)$ は系の体積 V を表す。

一方ポテンシャル中で状態 α_1 と α_2 にある二電子系の相互作用エネルギーの期待値は，

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|a(\alpha_2)a(\alpha_1) : H : a^\dagger(\alpha_1)a^\dagger(\alpha_2)|0\rangle \\
&= \int \sum_{\alpha} \left\langle 0 \middle| a(\alpha_2)a(\alpha_1) \int_{\boldsymbol{k}\neq \boldsymbol{0}} d^3x d^3y \, \frac{1}{2}\psi^\dagger(x)\psi^\dagger(y) \right. \\
&\quad \left. \times V(x-y)\psi(y)\psi(x)a^\dagger(\alpha_1)a^\dagger(\alpha_2) \middle| 0 \right\rangle \\
&= \int_{\boldsymbol{k}\neq \boldsymbol{0}} d^3x d^3y \, \frac{1}{2}(\overline{u}_{\alpha_1}(x)\overline{u}_{\alpha_2}(y) - \overline{u}_{\alpha_1}(y)\overline{u}_{\alpha_2}(x)) \\
&\quad \times V(x-y)(u_{\alpha_1}(x)u_{\alpha_2}(y) - u_{\alpha_1}(y)u_{\alpha_2}(x)) \\
&= \int_{\boldsymbol{k}\neq \boldsymbol{0}} d^3x d^3y \, V(x-y)(|u_{\alpha_1}(x)|^2|u_{\alpha_2}(y)|^2 \\
&\qquad\qquad - \overline{u}_{\alpha_1}(x)u_{\alpha_2}(x)\overline{u}_{\alpha_2}(y)u_{\alpha_1}(y))
\end{aligned}
\tag{5.81}
$$

と求まる。最後の式の右辺の第1項は電荷間のクーロンエネルギーであり，第2項は同種粒子の効果により出てきた項である。第1項を直接相互作用項といい，第2項を交換相互作用項という。直接相互作用項の符号はポテンシャルの符号で決まる。力が斥力でポテンシャルが正符号のときは，この項は正符号となる。しかし第2項めの交換相互作用項の符号は，ポテンシャルの符号とは独立である。たとえ二体力として斥力の場合でも交換相互作用項が負の値となることがある。さらに交換相互作用項が直接項よりも大きくなれば，二体状態としては引力的な振る舞いが起きることになる。このとき，量子論における多体的性質は古典論と定性的に異なる。交換相互作用項が0にならないのは，二つの状態 α_1 と α_2 の重なりがあるとき，すなわち同じ空間領域で関数が有限の値となるときである。重なりがないとき，すなわちそれぞれの関数が有限となる空間領域が離れているときは，交換項は0である。この場合は二体状態間の相互作用エネルギーは古典的な相互作用と定性的に同じである。

多体状態

二体相互作用の場合の多体状態のエネルギー期待値は，二体状態の場合に準じて計算される。多体状態

$$
\prod_{i=1}^{N} a^\dagger(\alpha_i)|0\rangle \tag{5.82}
$$

に対する相互作用エネルギーの期待値は，

$$\left\langle 0 \middle| \prod_{i=1}^{N} a(\alpha_i) : H : \prod_{j=1}^{N} a^\dagger(\alpha_j) \middle| 0 \right\rangle$$
$$= \sum_{i_1,i_2} \langle 0|a(\alpha_{i_1})a(\alpha_{i_2}) : H : a^\dagger(\alpha_{i_2})a^\dagger(\alpha_{i_1})|0\rangle$$
$$= \sum_{i_1,i_2} \int d^3x d^3y\, V(x-y)(|u_{\alpha_1}(x)|^2 |u_{\alpha_2}(y)|^2 - \overline{u}_{\alpha_1}(x) u_{\alpha_2}(x) \overline{u}_{\alpha_2}(y) u_{\alpha_1}(y)) \tag{5.83}$$

と与えられる。ここですべての対のエネルギーの和から，多体系のエネルギーが得られる。二電子対のエネルギーは直接項と交換項との和となってい，二体状態の場合と全く同じである。

5.3.2 摂動論

今まではエネルギー期待値を計算した。基底状態のエネルギーの期待値は，固有値よりも必ず大きい。しかし期待値がどれくらい固有値より大きいかを知るのは難しい。また，期待値を真の固有値の値により近づける方法はわからない。その点摂動論では近似を限りなく上げることが原理的に可能である。摂動展開による近似が，より良い方法となることも多い。この節では二体相互作用を摂動論で扱う。

二体状態

まず，二体状態のエネルギーを相互作用に関する摂動論で求めよう。固有値方程式

$$(H_0 + H_{\text{int}})|\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2\rangle = E|\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2\rangle \tag{5.84}$$

で H_{int} を摂動項として扱う。相互作用の 1 次で状態は，

$$|\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2\rangle^{(1)} = \int d\boldsymbol{k}_1' d\boldsymbol{k}_2' \frac{1}{E(\boldsymbol{k}_1', \boldsymbol{k}_2') - E(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2)} \langle \boldsymbol{k}_1', \boldsymbol{k}_2'|H_{\text{int}}|\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2\rangle \tag{5.85}$$

となり，エネルギーは

$$E^{(1)}\langle \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2|\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2\rangle = -\delta(0)V(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2) \tag{5.86}$$

と得られる。さらにエネルギーの値は H_{int} の 2 次で

$$E^2(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2)\langle \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2|\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2\rangle$$
$$= \int d\boldsymbol{k}_1' d\boldsymbol{k}_2' \langle \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2|H_{\text{int}}|\boldsymbol{k}_1', \boldsymbol{k}_2'\rangle \frac{1}{E_0(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) - E_0(\boldsymbol{k}_1', \boldsymbol{k}_2')} \langle \boldsymbol{k}_1', \boldsymbol{k}_2'|H_{\text{int}}|\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2\rangle \tag{5.87}$$

となる。ここで

$$E_0(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) = \frac{\boldsymbol{k}_1{}^2}{2m} + \frac{\boldsymbol{k}_2{}^2}{2m} \tag{5.88}$$

$$\langle \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2 | H_{\rm int} | \boldsymbol{k}'_1, \boldsymbol{k}'_2 \rangle = (V(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}'_1) - V(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}'_2))\delta(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}'_1 - \boldsymbol{k}'_2) \tag{5.89}$$

である。

多体状態

二体状態の計算を N 体状態の計算に拡張するには，固有値方程式

$$(H_0 + H_{\rm int})|\Psi_N\rangle = E_N|\Psi_N\rangle \tag{5.90}$$

で状態を N 体からなるものとして，

$$|\Psi_N\rangle = \prod_{i=1}^{N} a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)|0\rangle + O(H_{\rm int}) \tag{5.91}$$

と展開すればよい。0 次の状態を何にとってもそれに対応する固有状態が求まる。この多体状態が特に，$|\boldsymbol{k}_i| \leq p_F$ となるすべての運動量の一体状態を，エネルギー順に詰めた状態としよう。このときの電子密度を ρ とする。この系は化学ポテンシャル項

$$\mu\psi^\dagger(x)\psi(x) \tag{5.92}$$

をラグランジアンに加えることで表せる。化学ポテンシャル項があるとき，μ よりも小さいエネルギーをもつ一体状態のエネルギーは負の値をもつ。次章のディラック場の場合と同じに，負エネルギー状態がつまった状態は，μ よりも小さいエネルギーをもつ一体状態がすべて埋まった多体状態である。この状態は，電子密度が一定の値をもつ。この条件のもとで実現する基底状態が，電子密度が一定の値 ρ をとるときの基底状態である。p_F，μ と ρ は互いに一対一に対応している。その関係式には相互作用の効果が入ってくる。相互作用がないときは電子密度とエネルギー密度の定義式，

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{p \leq p_F} d^3p \tag{5.93}$$

$$\mu = \frac{p_F^2}{2m} \tag{5.94}$$

から これらの p_F 依存性

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}p_F^3 = \frac{1}{6\pi^2}p_F^3 \tag{5.95}$$

が簡単に求まる。これから，p_F や μ が ρ の関数として

$$p_F = (6\pi^2\rho)^{1/3} \tag{5.96}$$

$$\mu = (6\pi^2 \rho)^{2/3} \tag{5.97}$$

と求められる。相互作用がある系での計算は複雑になるので後で行う。

相互作用ハミルトニアンは，2 電子を消滅して 2 電子を生成する。だから相互作用の 1 次で，状態は

$$H_{\rm int} \prod_{i=1}^{N} a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)|0\rangle = \sum V(\boldsymbol{k}) a^\dagger(\boldsymbol{k}_{i'}) a^\dagger(\boldsymbol{k}_{j'}) \prod_{i=1}^{N} (i \neq i', j') a^\dagger(\boldsymbol{k}_i)|0\rangle \tag{5.98}$$

となる。また，相互作用について任意の次数で摂動計算を行うことができる。

空孔演算子

さて，有限の密度をもつ電子系の研究では，この密度をもつ基底状態を真空 $|0\rangle$ として表すと計算の見通しがよい。これは，後で述べるディラック粒子におけるディラックの海と同様に電子演算子を電子と空孔に区別して表すことで実現できる。運動量の大きさが p_F より小さい消滅演算子を新たな空孔の生成演算子として

$$d^\dagger(\boldsymbol{p}) = a(\boldsymbol{p}); \quad p \leq p_F \tag{5.99}$$

と表す。運動量の大きさが p_F より大きい演算子については，$a(\boldsymbol{p})$ をそのまま使う。この表示で計算を行うと見通しがよい。すると，相互作用がない系で，密度が ρ で化学ポテンシャルが μ である基底状態を $|0,\mu\rangle$ と表すと，これは

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{p})_{p \geq p_F} |0,\mu\rangle &= 0 \\ d(\boldsymbol{p})_{p \leq p_F} |0,\mu\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{5.100}$$

を満たしている。

この表示では，基底状態や電子正孔励起状態は

$$|0,\mu\rangle \tag{5.101}$$

$$a^\dagger(\boldsymbol{p}_1) d^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0,\mu\rangle \tag{5.102}$$

と簡単に表せる。また，基底状態やエネルギーの摂動計算がなされる。

5.4 ハートリー・フォック近似

摂動論を相互作用表示に基づいて行うと，場は自由場の波動方程式に従う。その結果，場の展開には相互作用がない系の固有状態を使う。状態ベクトルは相互作用に基づいて時間発展するので，この波動方程式を解くことにより物理的情報が取り出せる。しかし相互作用がある系で密度が有限である場合では，他の完全系を使う展開がより良い近似となる場合がある。一つの方法は，エネ

ルギーの期待値を最低にする基底を求め，この基底で場の演算子を展開することである。次に摂動論的に相互作用の効果をとり込む。多くの物理系で広く適用されるこの近似方法はハートリー・フォック近似とよばれる。ハートリー・フォック近似では，電子場を展開する完全系に，相互作用の効果や密度などを考慮に入れた最適なものを使う。その際，基底状態のエネルギー期待値が最も低い値を与えるように，完全系を選ぶのが常套的な方法である。

相互作用がある系でのエネルギー期待値，

$$E = \sum_{\alpha} E_\alpha + \sum_{i_1,i_2} \int d^3x d^3y \, V(x-y)\Big(|u_{\alpha_1}(x)|^2 |u_{\alpha_2}(y)|^2 - \overline{u}_{\alpha_1}(x) u_{\alpha_2}(x) \overline{u}_{\alpha_2}(y) u_{\alpha_1}(y)\Big) \tag{5.103}$$

を停留的とする関数基底を求めよう。ただしこの関数基底は規格化されている。そのため，この関数を求めることは，条件がついた変分問題を解くことに帰着される。規格化条件

$$\int d^3x \, \overline{u}_{\alpha_i}(x) u_{\alpha_i}(x) = 1 \tag{5.104}$$

を満たすときのエネルギーの変分条件は，

$$\frac{\partial}{\partial \overline{u}_{\alpha_i}(x)} E - e_i u_{\alpha_i}(x) = 0 \tag{5.105}$$

である。ここで e_i は未定の定数である。この式は $u_{\alpha_i}(x)$ についての微分と積分が絡む微積分方程式である。高速計算機の進歩により，微積分方程式を数値的に解き計算を進めることができる。

基底状態のエネルギー期待値を最小にする基底関数が求まったとき，さらに計算の近似を進めるのには，摂動論が適している。摂動論ではハミルトニアンを場の 2 次式と高次式に，

$$H = H_0^{(MF)} + H_1^{(MF)} \tag{5.106}$$

と分解し，相互作用の高次効果を H_1 から求める。ここで

$$H_0^{(MF)} = \int d^3x \, \psi^\dagger(\boldsymbol{x}) \left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{x})\right) \psi(\boldsymbol{x}) + H_{MF} \tag{5.107}$$

$$H_{MF} = \int d^3x d^3y \, \langle \psi^\dagger(\boldsymbol{y}) \psi(\boldsymbol{y}) \rangle V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \psi^\dagger(\boldsymbol{x}) \psi(\boldsymbol{x}) - \int d^3x d^3y \, \psi^\dagger(\boldsymbol{x}) \langle \psi^\dagger(\boldsymbol{y}) \psi(\boldsymbol{x}) \rangle V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \psi(\boldsymbol{y}) \tag{5.108}$$

であり，相互作用は

$$H_1^{(MF)} = H_1 - H_{MF} \tag{5.109}$$

$$\langle|H_1^{(MF)}|\rangle = 0 \tag{5.110}$$

である。また，

$$\langle\psi^\dagger(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})\rangle = \Sigma_\alpha|u_\alpha(\boldsymbol{x})|^2 \tag{5.111}$$

$$\langle\psi^\dagger(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})\rangle = \Sigma_\alpha u_\alpha^*(\boldsymbol{x})u_\alpha(\boldsymbol{y}) \tag{5.112}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{x}) + \int d^3y\langle\psi^\dagger(\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{y})\rangle V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right)u_\alpha(\boldsymbol{x}) \\ - \int d^3y\langle\psi^\dagger(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{y})\rangle V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))u_\alpha(\boldsymbol{y}) = e_\alpha u_\alpha(\boldsymbol{x}) \tag{5.113}$$

である。右辺の和は，電子がつまった状態でとられる。H_0 の決定に相互作用を取り入れている点，通常の摂動論とは異なる。しかしながら，H_0 は場の 2 次式であるので，一度 H_0 を決めた後の計算は，通常の摂動論と同じである。

5.4.1 トーマス・フェルミ近似

前節のハートリー・フォック近似以外にも様々な近似法がある。その一つであるトーマス・フェルミ近似は，量子力学の準古典近似法である WKB 法を多体問題に応用したものである。

電子密度が一様で ρ であるとき，フェルミ運動量 p_F は

$$\frac{p_F^3}{3\pi^2} = \rho \tag{5.114}$$

で決まる。次に電子密度が空間でゆっくり変化して $\rho(x)$ と表せる場合，フェルミ運動量 $p_F(x)$ も座標の関数とみなせ，

$$\frac{p_F(x)^3}{3\pi^2} = \rho(x) \tag{5.115}$$

となる。このように密度と，フェルミ運動量を空間座標の関数とみなして，電子系の性質を調べる方法を，トーマス・フェルミ近似という。

5.5 電子ガスの熱力学的性質

電子ガスは，有限な圧力や圧縮率をもつ気体である。しかし圧力や圧縮率は相互作用や密度の影響を受けて，自由ガスの値からずれる。これを求めよう。

自由電子ガス

相互作用がない N 個の電子が体積 V の立方体に閉じ込められているとしよう。周期境界条件を満たす一体運動量は，

$$e^{i(p_i+L)x_i} = e^{ip_ix_i} \tag{5.116}$$

$$p_iL = 2\pi n_i \tag{5.117}$$

である。一方，非相対論的な一体エネルギーは，

$$E(\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{5.118}$$

である。ところで，電子はフェルミ統計に従うので，一つのエネルギー準位に一つの電子がつまることができる。そのため，N 粒子系の基底状態は低いエネルギー準位に電子がつまり，高いエネルギー状態は空になった状態である。運動量の大きさが P_F より低い状態がすべて埋まっている電子系のエネルギーや密度を求める。まず粒子数と全エネルギーを p_F で表す。粒子数は

$$\begin{aligned} N &= \sum_{|\boldsymbol{p}|\le p_F} 1 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int^{p_F} d^3p \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{p_F} dp\, p^2 = \frac{V}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}{p_F}^3 = \frac{V}{6\pi^2}{p_F}^3 \end{aligned} \tag{5.119}$$

となる。次にエネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \sum_{|\mathbf{p}|\le p_F} \frac{p^2}{2m} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int^{p_F} d^3p \frac{p^2}{2m} \\ &= \frac{V}{2m(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{p_F} dp\, p^4 = \frac{V}{2m(2\pi)^3}\frac{4\pi}{5}{p_F}^5 = \frac{V}{20m\pi^2}{p_F}^5 \end{aligned} \tag{5.120}$$

である。エネルギーを体積と粒子数で表すため，p_F を逆に解いて粒子数で表す。

$$p_F = \left(\frac{N}{V}6\pi^2\right)^{1/3} \tag{5.121}$$

$$E = \frac{V}{20m\pi^2}\left(\frac{N}{V}6\pi^2\right)^{5/3} \tag{5.122}$$

粒子数を一定にして体積が変化したときの全エネルギーの変化率が圧力 P である。そのため

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V}\bigg|_N = \frac{2}{3}\frac{1}{20m\pi^2}\left(\frac{N}{V}6\pi^2\right)^{5/3} \tag{5.123}$$

となる。さらに圧力の変化率が圧縮率 κ の逆数であり，

$$\kappa^{-1} = -V\frac{\partial P}{\partial V}\bigg|_N = \frac{2}{5}\frac{1}{20m\pi^2}\left(\frac{N}{V}6\pi^2\right)^{5/3} \tag{5.124}$$

となる。結局，密度 $\rho = N/V$ を使い圧力と圧縮率が，

$$P = \frac{2}{3}\frac{1}{20m\pi^2}(\rho 6\pi^2)^{5/3} \tag{5.125}$$

$$\kappa^{-1} = \frac{2}{5}\frac{1}{20m\pi^2}(\rho 6\pi^2)^{5/3} \tag{5.126}$$

となる。圧力が正符号であることは，電子ガスのエネルギーは体積が大きいほうが小さくなること，すなわちガスは境界がなければ広がろうとする性質があることを意味する。圧縮率が正定値であることは，ガスが安定であることを意味する。

次に相互作用による補正を求める。

クーロンガス：ハートリー・フォック近似

電荷間に働くクーロン斥力による相互作用エネルギーの期待値は

$$E^{(2)} = \sum_{\boldsymbol{k}} n_{\boldsymbol{k}} \Sigma_x(\boldsymbol{k}) \tag{5.127}$$

と表される。ここで，

$$\begin{aligned}
\Sigma_x(\boldsymbol{k}) &= -\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{4\pi e^2}{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|}n'_{\boldsymbol{k}} \\
&= -\frac{e^2}{\pi}\int_0^{p_F} k'^2 dk' \int_{-1}^{1}\frac{dz}{k^2+k'^2-2kk'z} \\
&= -\frac{e^2}{\pi k}\int_0^{p_F} k'dk' \ln\left|\frac{k+k'}{k-k'}\right| \\
&= -\frac{e^2 p_F}{\pi k}\left(1+\frac{1-y^2}{2y}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|\right)
\end{aligned} \tag{5.128}$$

$$y = \frac{k}{p_F} \tag{5.129}$$

である。これを (5.127) 式に代入して $\boldsymbol{k}$ 積分を実行して，

$$E^{(2)} = -\frac{3}{4}\frac{e^2 p_F}{\pi}N \tag{5.130}$$

を得る。

これより相互作用による全エネルギーは，e^2 の 1 次の近似で

$$E = E^{(0)} + E^{(2)} \tag{5.131}$$

$$= \frac{V}{20m\pi^2}p_F^5 - \frac{Ve^2}{8\pi^3}p_F^4 \tag{5.132}$$

と与えられる。第 1 項は正定値で p_F の 5 次式であり，第 2 項は負定値で p_F の 4 次式である。ところで，p_F は

$$p_F = (\rho 6\pi^2)^{1/3} \tag{5.133}$$

となる密度 ρ の一様な増加関数である。全エネルギーから求まる圧力と圧縮率は，

$$P = \frac{1}{30m\pi^2}(6\pi^2\rho)^{5/3} - \frac{e^2}{24\pi^3}(6\pi^2\rho)^{4/3} \tag{5.134}$$

$$\kappa^{-1} = \frac{1}{18m\pi^2}(6\pi^2\rho)^{5/3} - \frac{e^2}{18\pi^3}(6\pi^2\rho)^{4/3} \tag{5.135}$$

であり，低い密度では第 2 項が第 1 項に打ち勝ち圧力や圧縮率が負になる。このとき，電子ガスは不安定となる。

5.6 相と対称性

一つのラグランジアンで表される電子系で，異なる性質をもついくつかの相が実現することがある。異なる相は，対称性に関する性質で分類される。そのための，パラメーターがオーダーパラメーターである。

5.6.1 オーダーパラメーター

前章の結果で，電子密度が小さい領域では電子ガスは負の圧縮率をもつことになり，安定ではなくなる。一様な密度をもち，平行移動に対して不変な状態である電子ガスが不安定であるとき，電子ガスとは異なる安定な状態があるはずである。つまり，ガスとは異なる相が実現することが示唆される。一つのラグランジアンで記述される物理系でいかなる相が存在するかを解明することは興味深い問題である。これらの相を特徴づけるのは，相がもつ対称性や不変性である。様々な相は対称性と密接に関連するオーダーパラメーターで区別される。オーダーパラメーターについての電子系のエネルギー依存性を明らかにすることができれば，系の状態を対称性に基づいて分類することが可能である。これから，系の相構造が解析される。相を，平行移動，位相変換，回転，空間反転や時間反転等の変換に対する不変性をもつか否かで特徴づけることができる。電子ガスは相互作用が全くない系で実現し，これらの変換に対する不変性をもつ状態である。

基底状態の対称性を分類するのに，演算子の期待値が使われる。例えば，

$$\langle 0|\psi(x)\psi^\dagger(y)|0\rangle \tag{5.136}$$

が $x-y$ の関数でないとき座標の平行移動対称性が破れ，

$$\langle 0|\psi^\dagger(x)\psi^\dagger(y)|0\rangle \tag{5.137}$$

が 0 でないとき場の位相変換に対する不変性が破れる。前者の例は結晶状態であり，後者の例は超伝導や超流動相である。ラグランジアンは，もともと場の

位相変換や座標の平行移動をはじめとする上記の変換に対して不変である。しかし，これらの不変性を破る様々な相がある。

5.6.2　平行移動

多体状態に平行移動を引き起こすのは，運動量演算子 P_i によるユニタリー変換

$$U(\boldsymbol{a}) = e^{i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a}} \tag{5.138}$$

$$U(\boldsymbol{a})\psi(\boldsymbol{x})U^\dagger(\boldsymbol{a}) = \psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}) \tag{5.139}$$

$$U(\boldsymbol{a})\psi^\dagger(\boldsymbol{x})U^\dagger(\boldsymbol{a}) = \psi^\dagger(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}) \tag{5.140}$$

である。平行移動に対して不変な基底状態

$$U(\boldsymbol{a})|0\rangle = |0\rangle \tag{5.141}$$

$$\boldsymbol{P}|0\rangle = 0 \tag{5.142}$$

に関する期待値は

$$\begin{aligned}&\langle 0|\psi(x)\psi^\dagger(y)|0\rangle \\ &\quad = \langle 0|U^\dagger(\boldsymbol{a})U(\boldsymbol{a})\psi(x)U^\dagger(\boldsymbol{a})U(\boldsymbol{a})\psi^\dagger(y)U^\dagger(\boldsymbol{a})U(\boldsymbol{a})|0\rangle \\ &\quad = \langle 0|\psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})\psi^\dagger(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a})|0\rangle\end{aligned} \tag{5.143}$$

となる。パラメーター $\boldsymbol{a}$ が任意であることより，これが成り立つのは期待値が

$$\langle 0|\psi(x)\psi^\dagger(y)|0\rangle = S(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{5.144}$$

と座標の差 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ の関数であるときである。逆に期待値が座標の差だけではなく，座標の和の依存性をもつ関数

$$\langle 0|\psi(x)\psi^\dagger(y)|0\rangle = S(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \tag{5.145}$$

である場合は，平行移動に対する対称性が破れる。たとえば，密度

$$\langle 0|\psi^\dagger(x)\psi(x)|0\rangle = S(0, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \tag{5.146}$$

が一定でない系では平行移動に対する対称性が破れている。電子が自らの相互作用で格子上に並んだ Wigner 格子は，平行移動に対する対称性を破る相である。また，原子や分子からなる結晶では，やはり平行移動に対する対称性が破れている。原子間に働く力や，分子間に働く力は平行移動不変性をもつので，これらの結晶では対称性が自発的に破れている。

5.6.3　位相変換

粒子数演算子 Q による場の位相変換は

$$U(\alpha) = e^{iQ\alpha} \tag{5.147}$$

$$U(\alpha)\psi^\dagger(x)U^\dagger(\alpha) = e^{i\alpha}\psi^\dagger(x) \tag{5.148}$$

$$U(\alpha)\psi(x)U^\dagger(\alpha) = e^{-i\alpha}\psi(x) \tag{5.149}$$

である。位相変換に対して不変な基底状態

$$U(\alpha)|0\rangle = e^{i\alpha N}|0\rangle \tag{5.150}$$

$$Q|0\rangle = N|0\rangle \tag{5.151}$$

に関する期待値は

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\psi^\dagger(x)\psi^\dagger(y)|0\rangle \\
&\quad = \langle 0|U^\dagger(\alpha)U(\alpha)\psi^\dagger(x)U^\dagger(\alpha)U(\alpha)\psi^\dagger(y)U^\dagger(\alpha)U(\alpha)|0\rangle \\
&\quad = e^{2i\alpha}\langle 0|\psi^\dagger(x)\psi^\dagger(y)|0\rangle
\end{aligned} \tag{5.152}$$

となる。パラメーター α が任意であることより，

$$\langle 0|\psi^\dagger(x)\psi^\dagger(y)|0\rangle = 0 \tag{5.153}$$

となる。

逆に

$$\langle 0|\psi^\dagger(x)\psi^\dagger(y)|0\rangle \neq 0 \tag{5.154}$$

となるとき，位相変換に対する対称性が破れている。だから，$\langle 0|\psi^\dagger(x)\psi^\dagger(y)|0\rangle$ が位相変換の破れを示すオーダーパラメーターである。もし場が電荷をもたないならば，位相変換に対する不変性を破る状態は超流動状態であり，電荷をもつ場では超伝導状態である。

5.6.4 回　転

スピンを考慮した電子はスピン変数をもつ場

$$\psi_\sigma(x) \tag{5.155}$$

で表せる。微小な回転角 θ_i の微小回転に対して，場は

$$\psi_\sigma(x) \to \psi_\sigma(x) + i\theta_i(L_i\psi_\sigma(x) + s_{i\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}(x)) \tag{5.156}$$

$$L_i = \epsilon_{ijk}x_j p_k \tag{5.157}$$

と座標の変換に加えて，場の成分の変換を受ける。だからスピン角運動量の期待値

$$\left\langle 0 \left| \int d^3x \psi_\sigma^\dagger(x) \boldsymbol{s}_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}(x) \right| 0 \right\rangle \tag{5.158}$$

が回転対称性の破れを示すオーダーパラメーターである。このオーダーパラメーターは，自発磁化の大きさを表す。強磁性体で自発磁化が発現する。

5.6.5 空間反転・時間反転

空間反転 (P) や時間反転 (T) に対しては，粒子の座標 $\boldsymbol{x}$ や運動量 $\boldsymbol{p}$ は

$$P: \quad \boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p} \tag{5.159}$$

$$T: \quad \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p} \tag{5.160}$$

と変換される。これから，角運動量ベクトルは空間反転に対して，

$$P: \quad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p} \tag{5.161}$$

$$\to (-)\boldsymbol{x} \times (-)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{l} \tag{5.162}$$

と不変であり時間反転に対しては，

$$T: \quad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p} \tag{5.163}$$

$$\to \boldsymbol{x} \times (-)\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{l} \tag{5.164}$$

と逆向きに変換される。スピンも角運動量の一種であるため，空間 P や時間 T の反転に対して同じ変換性をもつ。そのため，空間反転と時間反転に対しては，

$$P: \quad \boldsymbol{s} \to \boldsymbol{s} \tag{5.165}$$

$$T: \quad \boldsymbol{s} \to -\boldsymbol{s} \tag{5.166}$$

と変換される。これより，スピンと運動量の内積は

$$P: \quad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{s} \to -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{s} \tag{5.167}$$

$$T: \quad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{s} \to \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{s} \tag{5.168}$$

と変換される。

粒子の力学変数の変換性より，多電子系の空間反転や時間反転に関する性質は，場によるオーダーパラメーター

$$\left\langle 0 \left| \int d^3x\, \psi^\dagger_\sigma(x) \boldsymbol{s}_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'}(x) \right| 0 \right\rangle \tag{5.169}$$

$$\left\langle 0 \left| \int d^3x\, \psi^\dagger_\sigma(x) \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{s}_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'}(x) \right| 0 \right\rangle \tag{5.170}$$

の値で決まる。これらの値が 0 であるならば対応する対称性は保存され，0 でないならば対称性は破れる。これらの対称性が相互作用により破れるかどうか，またいかなる相が実現するのかは，各相のエネルギーで決まる。これを解明するのは，力学的な問題である。

5.7 有効ラグランジアン

5.7.1 外場と有効作用

オーダーパラメーターがわかっている電子系で相の解析を行う一つの方法は，オーダーパラメーターに関する有効作用や有効ラグランジアンを調べることである。3章でスカラー場の源項を導入して有効作用を求めた。これとほぼ同じ方法でオーダーパラメーターの源項を導入し，系の力学的性質を解析する。オーダーパラメーター

$$\varphi^l(x) = \langle 0|\psi_i^\dagger(x)\sigma_{ij}^l\psi_j(x)|0\rangle \tag{5.171}$$

に対する外場

$$j^l(x) \tag{5.172}$$

が付加された系の有効作用 $W[j^l(x)]$ を，電子場に関する経路積分で

$$\begin{aligned}&\exp\big(-W[j^l(x)]\big) \\ &= \int D\psi_l(x)D\psi_l^\dagger(x)\exp\Big(-\int dx(L - j^l(x)\psi^\dagger(x)\sigma^l\psi(x))\Big)\end{aligned} \tag{5.173}$$

と定義する。源で汎関数微分を行い，

$$\frac{\partial W[j]}{\partial j^l(x)} = \langle\psi^\dagger(x)\sigma^l\psi(x)\rangle = \varphi^l(x) \tag{5.174}$$

となる。ルジャンドル変換した

$$\Gamma = W[j^l(x)] - \varphi^l(x)j^l(x) \tag{5.175}$$

の微小量は

$$\begin{aligned}\delta\Gamma &= -\delta\varphi^l(x)j^l(x) - \varphi^l(x)\delta j^l(x) + \frac{\partial W}{\partial j^l(x)}\delta j^l(x) \\ &= -\delta\varphi^l(x)j^l(x)\end{aligned} \tag{5.176}$$

となる。だから Γ は場 $\varphi^l(x)$ を自変数とし，

$$\frac{\partial W[\varphi]^l(x)}{\partial\varphi^l(x)} = -j^l(x) \tag{5.177}$$

となる。このため，源 $j^l(x)$ が 0 であるときの場の期待値 $\varphi^l(x)$ は

$$\frac{\partial W[\varphi]^l(x)}{\partial\varphi^l(x)} = 0 \tag{5.178}$$

から決まる。だから有効作用 $W[\varphi^l(x)]$ がわかれば，外場 $j^l(x)$ がない場合，すなわち真空中の場の期待値がわかることになる。有効作用を求めるのは，式(5.173) を摂動的な近似計算や，様々な近似法を使い計算することで行われる。

5.7.2 補 助 場

相互作用が特別の形をしている場合には，補助場で場の理論を書き換えることで，有効作用を直接得ることができる。補助場がオーダーパラメーターと同じ量子数をもつならば，外場を導入するのと本質的に同じ計算をすることになる。例えば，電子場の 4 次の項を補助場による経路積分で書き換えて

$$\exp\int dx\, g(\psi^\dagger(x)\sigma^l\psi(x))^2 \tag{5.179}$$
$$= N_\varphi \int D\varphi^l(x) \exp\left(-\int dx(\varphi^l(x))^2 - 2\sqrt{g}\varphi^l(x)\psi^\dagger(x)\sigma^l\psi(x)\right)$$

$$N_\varphi{}^{-1} = \int D\varphi^l(x) \exp\left(-\int dx(\varphi^l(x))^2\right) \tag{5.180}$$

が得られる。変数を積分する順序を変えて，先に電子場の積分を行うと補助場 $\varphi^l(x)$ に関する有効ポテンシャルが得られる。

他のオーダーパラメーターについても，対応する源を導入して同様な計算が行われる。

5.7.3 フェルミ面近傍の電子対：クーパー対

本節では，前の 2 節とは異なり金属中の電子系に関する具体的な問題を考察する。

有限の密度をもつ電子系では，密度から決まるフェルミ運動量 p_F より小さい大きさの運動量をもつ一粒子状態には電子がつまり，フェルミ運動量 p_F より大きい運動量をもつ一粒子状態は空いたままである。また，フェルミ運動量 p_F のごく近傍の電子は極めて小さな一粒子エネルギーをもつ。このため，この領域の状態にある電子系では，相互作用の効果が大きくなる。特に，電子間に引力が働いている場合は，引力相互作用の寄与が運動エネルギーの寄与に打ち勝ち，電子対のエネルギーが負符号になることがある。この場合，電子対がある状態は，電子対のない状態よりも低いエネルギーをもつ。その結果，電子対の凝縮が起きる。一方，電子対は場の位相変換で変わる性質をもつ。このため，電子対が凝縮した相では，位相変換の対称性が破れる。スピンをもつ電子間に相互作用がある系，

$$H = H_0 + H_1 \tag{5.181}$$

$$H_0 = \sum_{\boldsymbol{k},\alpha} \xi(\boldsymbol{k}) a_\alpha^\dagger(\boldsymbol{k}) a_\alpha(\boldsymbol{k}) \tag{5.182}$$

$$H_1 = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{q};\alpha} V_{\alpha,\beta;\alpha',\beta'}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')a_\beta^\dagger(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})a_\alpha^\dagger(\boldsymbol{k}')a_{\alpha'}(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{q})a_{\beta'}(\boldsymbol{k}) \quad (5.183)$$

$$\xi(\boldsymbol{k}) = \frac{\boldsymbol{k}^2}{2m} - \mu \quad (5.184)$$

を考察する。ここで α, β はスピンを表し，二体相互作用 $V_{\beta,\alpha;\alpha',\beta'}(-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$ は，物質中で電子間に働くものとする。電子がフェルミ・ディラック統計に従うため，

$$V_{\beta,\alpha;\alpha',\beta'}(-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = V_{\alpha,\beta;\beta',\alpha'}(\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}') \quad (5.185)$$

$$= -V_{\alpha,\beta;\alpha',\beta'}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') \quad (5.186)$$

である。また，ハミルトニアンがエルミートであるため，

$$V^*_{\alpha,\beta;\beta',\alpha'}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = V_{\alpha',\beta';\alpha,\beta}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}) \quad (5.187)$$

となっている。スピンを変えない相互作用は，

$$V_{\alpha,\beta;\alpha',\beta'}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} - \delta_{\alpha\beta'}\delta_{\beta\alpha'})V^e(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') + \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} + \delta_{\alpha\beta'}\delta_{\beta\alpha'})V^o(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') \quad (5.188)$$

$$V^e(-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = V^e(\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}') = V^e(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') \quad (5.189)$$

$$V^o(-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = V^o(\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}') = V^o(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') \quad (5.190)$$

である。

ここで，まず二粒子系を考察する。全運動量が 0 である二粒子系

$$C_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}) = a_\alpha^\dagger(\boldsymbol{k})a_\beta^\dagger(-\boldsymbol{k})|0\rangle \quad (5.191)$$

$$C_{\beta\alpha}(-\boldsymbol{k}) = -C_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}) \quad (5.192)$$

の固有値方程式は

$$\left(\frac{1}{m}\boldsymbol{k}^2 - E\right)C_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}) + \sum_{\boldsymbol{k}',\alpha',\beta'} V_{\alpha,\beta;\alpha',\beta'}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')C_{\alpha'\beta'}(\boldsymbol{k}') = 0 \quad (5.193)$$

となる。波動関数や相互作用ポテンシャルを球関数で

$$C(\boldsymbol{k}) = \sum_l^m C_l^m(k)Y_l^m(\Omega_{\boldsymbol{k}}) \quad (5.194)$$

$$V(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = 4\pi\sum_l V_l(k,k')\sum_m Y_l^m(\Omega_{\boldsymbol{k}})Y_l^{-m}(\Omega'_{\boldsymbol{k}}) \quad (5.195)$$

と展開しておく。角運動量の固有状態に射影した固有値方程式は

$$\left(\frac{1}{m}\boldsymbol{k}^2 - E\right)C_l^m{}_{\alpha\beta}(k) + \sum_{k',\alpha',\beta'} V_l^m{}_{\alpha,\beta;\alpha',\beta'}(k,k')C_l^m{}_{\alpha'\beta'}(k') = 0 \quad (5.196)$$

となる。各角運動量で引力ポテンシャル

$$V_l^m \leq 0 \tag{5.197}$$

であるとき，束縛状態の解が可能である。

いま最も簡単なポテンシャルである $l=0$ の s 波を考察する。フェルミ面近傍の幅 ω_c で，一定の引力ポテンシャル

$$V_{l=0}(k,k') = -g \quad (\omega_c \geq k^2/2m) \tag{5.198}$$

が働くとする。

二粒子状態を拡張して，電子対が生成された状態を考察する。対状態に変換するユニタリー演算子は，

$$U = \exp \sum (C_k a_{k+}^\dagger a_{-k-}^\dagger - C_k^* a_{-k-} a_{k+}) \tag{5.199}$$

であり，係数 C_k が小さいとき，

$$U = 1 + \sum (C_k a_{k+}^\dagger a_{-k-}^\dagger - C_k^* a_{-k-} a_{k+}) \tag{5.200}$$

と近似される。この近似を使うとき，対状態に対する固有値方程式は

$$\Lambda_0^0 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk' k'^2 V_0(k,k') \frac{1}{E - \frac{k'^2}{m}} \Lambda_0^0 \tag{5.201}$$

$$= gN(0) \int_0^{\omega_c} d\xi \frac{1}{|E| + 2\xi} \Lambda_0^0(\mu)$$

$$= gN(0) \log \frac{|E| + 2\omega_c}{|E|} \Lambda_0^0(\mu) \tag{5.202}$$

となる。ただし

$$\Lambda_0^0(k) = \sum V(k,k') C(k') \tag{5.203}$$

である。これより，方程式は

$$gN(0) \log \frac{|E| + 2\omega_c}{|E|} = 1 \tag{5.204}$$

となり，必ず解がある。これは，引力が働く電子系では対凝縮した状態が安定になることを示唆する。

対凝縮を表すこの演算子は，生成・消滅演算子を

$$U a_{k+} U^\dagger = \cos\theta_k a_{k+} + \sin_k \theta_k a_{-k-}^\dagger \tag{5.205}$$

$$U a_{-k-}^\dagger U^\dagger = -\sin\theta_k a_{k+} + \cos\theta_k a_{-k-}^\dagger \tag{5.206}$$

$$\theta_k = C_k \tag{5.207}$$

と変換する。このため，

$$\langle U a_{k+}^\dagger a_{-k-}^\dagger U^\dagger \rangle = 2\cos\theta_k \sin\theta_k \tag{5.208}$$

$$\langle U a_{k+} a_{-k-} U^\dagger \rangle = 2\cos\theta_k \sin\theta_k \tag{5.209}$$

となり，電子対が凝縮した位相変換に対する不変性を破る状態を実現させる。

2フェルミオンモデル

次に電子対相互作用の効果を簡単な二体モデルで見てみよう。2自由度フェルミオンのハミルトニアン

$$H_0 = e_1 a_1^\dagger a_1 + e_2 a_2^\dagger a_2 \tag{5.210}$$

の固有状態と固有エネルギーは

$$|0\rangle; \quad E = 0 \tag{5.211}$$

$$|1\rangle = a_1^\dagger|0\rangle; \quad E = e_1 \tag{5.212}$$

$$|2\rangle = a_2^\dagger|0\rangle; \quad E = e_2 \tag{5.213}$$

$$|1,2\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger|0\rangle; \quad E = e_1 + e_2 \tag{5.214}$$

である。この系に対相互作用

$$H_{\text{int}} = \lambda(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_2 a_1) \tag{5.215}$$

を加える。ただし，結合定数 λ は実数とする。対相互作用を一粒子状態 $|1\rangle, |2\rangle$ にかけると0になり，一粒子状態は相互作用の影響を受けない。しかし，真空状態と二粒子状態は互いに

$$H_{\text{int}}|0\rangle = \lambda|1,2\rangle \tag{5.216}$$

$$H_{\text{int}}|1,2\rangle = \lambda|0\rangle \tag{5.217}$$

と変換する。このため，全ハミルトニアンの固有状態と固有値は，

$$|\widetilde{0}\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1,2\rangle; \quad E = \frac{e_1 + e_2 - \sqrt{(e_1+e_2)^2 + 4\lambda^2}}{2} \tag{5.218}$$

$$|\widetilde{1}\rangle = |1\rangle; \quad E = e_1 \tag{5.219}$$

$$|\widetilde{2}\rangle = |2\rangle; \quad E = e_2 \tag{5.220}$$

$$|\widetilde{1,2}\rangle = -\sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1,2\rangle; \quad E = \frac{e_1 + e_2 + \sqrt{(e_1+e_2)^2 + 4\lambda^2}}{2} \tag{5.221}$$

$$\tan\theta = \left(\frac{e_2 - e_1 - \sqrt{(e_1+e_2)^2 + 4\lambda^2}}{2\lambda}\right) \tag{5.222}$$

となる。対相互作用の結果，基底状態のエネルギーが下がり，一粒子状態のエネルギーは不変で，二粒子状態のエネルギーは上がる。

零粒子状態と二粒子状態が混合して新たな基底状態が形成されたので，この基底状態は状態 $|0\rangle$ と全く異なる性質をもち，有限の演算子対の期待値，

$$\langle\widetilde{0}|a_1^\dagger a_2^\dagger|\widetilde{0}\rangle = 2\cos\theta \tag{5.223}$$

をもつ。また基底状態と第一励起状態のエネルギー差は

$$\Delta E = \frac{e_1 - e_2 + \sqrt{(e_1 + e_2)^2 + 4\lambda^2}}{2} \tag{5.224}$$

となる。この結果より，たとえ $e_1 = 0$ でも

$$\Delta E = \frac{-e_2 + \sqrt{(e_2)^2 + 4\lambda^2}}{2} \tag{5.225}$$

となり，エネルギーギャップは有限の値となる。

多電子ハミルトニアン (5.183) に対しても，同様に対が凝縮した平均場解が求められる。

5.8 物質中の多様な電子系

電子は物質中では，真空中とは異なる自由度や対称性をもつことが多い。いくつかの例をまとめておく。

5.8.1 多自由度電子

電子はもともとスピンをもっている。また，原子に束縛された電子は，軌道角運動量によって区別される。さらに結晶の周期性からくるバンド構造をなしている。これらの自由度をもつ多様な電子が物質中にはあり，互いに相互作用している。これらの電子は座標以外のパラメーター依存性をもつ場 $\psi_\alpha(x)$ で記述され，場は交換関係，

$$\{\psi_\alpha(t,\boldsymbol{x}), \psi_\beta^\dagger(t',\boldsymbol{x}')\}\delta(t-t') = \delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(t-t') \tag{5.226}$$

$$\{\psi_\alpha(t,\boldsymbol{x}), \psi_\beta(t',\boldsymbol{x}')\} = 0 \tag{5.227}$$

$$\{\psi_\alpha^\dagger(t,\boldsymbol{x}), \psi_\beta^\dagger(t',\boldsymbol{x}')\} = 0 \tag{5.228}$$

を満たす。多電子系はラグランジアン，

$$L = \int d^3x \left(\psi_\alpha^\dagger(x) i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi_\alpha(x) - \psi_\alpha^\dagger(x) K_{\alpha\beta}\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \right)\psi_\beta(x) - H_{\text{int}} \right) \tag{5.229}$$

で表される。

5.8.2 強結合電子

今までは，バンドのエネルギー幅が広い場合を考察した。逆に，バンドのエネルギー幅が狭い場合は，幅が広い場合とは異なる一電子の表現法がとられる。この場合は，電子は結晶格子に強く結合され格子の近傍にある束縛電子が格子間を飛び回る運動をしていると理解できる。間隔 a の格子上の点

$$\boldsymbol{x} = a(n_1\boldsymbol{e}_1 + n_2\boldsymbol{e}_2 + n_3\boldsymbol{e}_3) \tag{5.230}$$

を座標とする場 $\psi(\boldsymbol{n})$ からなるラグランジアン

$$L = \sum_{\boldsymbol{n}} \psi(\boldsymbol{n})^{\dagger} i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{n}) - \sum_{\boldsymbol{n}'} K_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}'}\psi^{\dagger}(\boldsymbol{n})\psi(\boldsymbol{n}') - H_{\text{int}} \tag{5.231}$$

が多電子系を記述している。$K_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}'}$ は格子間の hopping を表す運動エネルギー項であり，モデルごとに異なる形をしている。隣の格子との間に値をもつ最近接相互作用の場合，

$$K_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}'} = K\delta(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{n} \pm \boldsymbol{e}_i) \tag{5.232}$$

となる。この場合一体エネルギーは，有限の幅をもつ関数

$$E(\boldsymbol{p}) = 2K(\cos ap_x + \cos ap_y + \cos ap_z) \tag{5.233}$$

で与えられる。最近接以外の格子間に結合をもつ場合，一体エネルギーは高次の三角関数を含むことになる。この場合でも，エネルギーは有限幅であり，運動量の周期関数となる。

とびとびの座標を変数とする場の反交換関係は，クロネッカーのデルタ関数をディラックのデルタ関数に置き換えて得られる。

5.8.3 低次元電子

特別な金属や半導体では，電子が 1 次元直線上や 2 次元平面上で運動する。この場合，電子は 1 次元や 2 次元の空間座標をもつ場で記述される。これら低次元電子系の性質は，3 次元電子系とは異なることが多い。低次元で大きく 3 次元と異なるものの一つは，零質量場を交換することにより生ずる静的ポテンシャルである。電場が広がらず，低次元空間に閉じ込められる場合に電荷間に働くクーロンポテンシャルも同じである。クーロンポテンシャルは零質量場の静的グリーン関数であり，フーリエ変換

$$G^{(1)}(x) = \int \frac{dp}{2\pi} \exp{(ipx)} \frac{1}{p^2} \tag{5.234}$$

$$G^{(2)}(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \exp{(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \frac{1}{\boldsymbol{p}^2} \tag{5.235}$$

$$G^{(3)}(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \exp{(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \frac{1}{\boldsymbol{p}^2} \tag{5.236}$$

で表される。これらは運動量の関数としては同じ形をしているが，次元の違いを反映して，フーリエ変換した座標の関数は大きく異なる。具体的な関数形は

$$G^{(1)}(x) = |x| \tag{5.237}$$

$$G^{(2)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\log(|\boldsymbol{x}|/x_0) \tag{5.238}$$

$$G^{(3)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \tag{5.239}$$

となり，特に長距離での振る舞いが低次元でより強くなる。これは，運動量の大きさ p の関数として，積分要素が次元で異なることによる。長距離領域におけるグリーン関数の振る舞いは運動量が小さい領域での積分で決まっているが，積分要素は次元 d で $p^{d-1}dp$ に比例する。このため，運動量が小さな値をとる領域は高い次元ほど小さく低次元ほど大きくなり，グリーン関数の長距離での値は低次元ほど大きくなる。このように，零質量場の効果は次元で大きく異なっている。そのため，電子間にこのポテンシャルが働いている多電子系の性質は，当然ながら次元で大きく異なる。

5.8.4 電磁場中の電子

外場中におかれた電子は，真空中とは異なる性質を示す。電場や磁場は四元電磁場ポテンシャル $A_\mu(x)$ で表される。電磁場中にある電子系では，異なる座標の電子場の積は，電磁場を含むものに置き換えられる。

磁場中の荷電粒子には，速度と磁場とのベクトル積に比例するローレンツ力が働く。ローレンツ力は質点の運動量を

$$p_\mu \to p_\mu - eA_\mu \tag{5.240}$$

と置き換えさせる。このため電磁場との結合は，電子場にかかる座標の微分

$$\psi^\dagger(x)K\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\psi(x) \tag{5.241}$$

を共変微分

$$\psi^\dagger(x)K\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} - eA_\mu(x)\right)\psi(x) \tag{5.242}$$

に置き換えて得られる。

また，有限の間隔離れた座標をもつ場の積や，座標が不連続である強結合電子の場合は，座標の微分は含まれない。これらの場合は，電子と座標の連続関数であるベクトルポテンシャルとの結合は，

$$\psi^\dagger(\boldsymbol{x})\exp i\int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{y}} eA_j(\boldsymbol{x}')dx'_j\psi(\boldsymbol{y}) \tag{5.243}$$

とベクトルポテンシャルを含む線積分の位相因子で与えられる。

いずれの場合でも，このように求めた電子場の積 (5.242)，(5.243) は，電子場と電磁場ポテンシャルに対する第二種のゲージ変換

$$\psi(x) \to e^{i\frac{e}{\hbar}\lambda(x)}\psi(x) \tag{5.244}$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\lambda(x) \tag{5.245}$$

に対して不変である。

同じ座標をもつ電子場の積

$$\begin{aligned}\psi^\dagger(x)\psi(x) &\to \psi^\dagger(x)e^{-i\frac{e}{\hbar}\lambda(x)}e^{i\frac{e}{\hbar}\lambda(x)}\psi(x) \\ &= \psi^\dagger(x)\psi(x)\end{aligned} \tag{5.246}$$

は，明らかにゲージ不変である。また電場と磁場との場の強度の関数

$$\begin{aligned}O[F_{\mu\nu}(x)] &= O\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\mu(x)\right] \\ &\to O\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}(A_\nu(x) + \partial_\nu\lambda(x)) - \frac{\partial}{\partial x_\nu}(A_\mu(x) + \partial_\mu\lambda(x))\right] = O[F_{\mu\nu}]\end{aligned} \tag{5.247}$$

も明らかにゲージ不変になっている。

同じ座標の場の積で表される相互作用は，電磁場がある系でも同じ形で書かれる。しかし，異なる座標をもつ場の積で書かれる相互作用は，電磁場がある系で電磁場を含むものに置き換えられる。

問題 5

5.1 磁場中の強結合電子の運動量を書き下し，一体エネルギーを求めよ。ただし，単位格子あたりの磁束 Φ は $\Phi = (1/2)\Phi_0$ とする。$\Phi_0 = \frac{e}{\hbar c}$. 磁束 Φ が $\Phi = (p/q)\Phi_0$ の場合についても議論せよ。

5.2 電子対場 $\Phi^{++}(x) = \langle\psi^\dagger\psi^\dagger\rangle$ に対する有効作用の一般形を求めよ。超伝導状態はどのように表せるか？

5.3 強磁性についても，$\varphi^\xi(x) = \langle\psi^\dagger\sigma^\xi\psi\rangle$ を使い議論せよ。

6章　量子電気力学

電磁場と電子場がローレンツ不変な形で相互作用しているミクロな物理系である量子電気力学では，力の場である電磁場と物質場である電子場が強く関係し合っている。場の力学が適用される典型的な物理系である。

6.1　相対性原理

真空とは物質が全く存在しない状態をいう。だから真空中では，空間や時間は一様であり，空間のすべての場所やすべての時間，ならびに互いに等速度で運動している観測者はすべて同等である。これらの座標系のどちらにいる観測者から見ても物理現象や物理法則は同じはずである。このため，真空中では，絶対静止系のような特殊で絶対的な座標系は存在しない。これを相対性原理という。真空中で，物理法則は相対性原理を満たすはずである。波動方程式も真空中では，相対性原理を満たすはずである。実際，電磁波を記述するマックスウェル方程式は相対論的に不変であり，光は電磁波であるため光も相対論的に不変な方程式で記述される。

光はまた，自然界にある多くの物質の中で最も特異な性質をもっている。光は素粒子の一つであるが，互いに等速度で運動しているどの観測者から測定しても速さが普遍的な値 c である。この事実は，最初マイケルソンとモーリーにより確認され，光速度不変の原理といわれる。

光速度不変の原理が成立するためには，互いに等速度で運動する二つの座標系の間では，空間座標と時間座標がともに変換されねばならない。互いに等速

度で運動する二つの観測者は，時間座標と空間座標を混ぜる一次変換であるローレンツ変換で結びつけられている。ローレンツ変換は，時間座標を $x_0\ (=ct)$，空間座標を x_i とすると，

$$\begin{aligned} x_\mu &\to \Lambda_{\mu,\nu} x^\nu \\ \Lambda_{\mu,\rho}\Lambda^{\rho,\nu} &= g_\mu^\nu \end{aligned} \tag{6.1}$$

で与えられる。2番目の条件式が，光速度が不変であることを保証している。ローレンツ変換の例は一方向に等速度で運動する場合の変換式，

$$\begin{aligned} x_0 &\to \cosh\theta x_0 + \sinh\theta x_1 \\ x_1 &\to \sinh\theta x_0 + \cosh\theta x_0 \\ x_2 &\to x_2 \\ x_3 &\to x_3 \end{aligned} \tag{6.2}$$

である。ローレンツ変換では ${x_0}^2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 - {x_3}^2$ が不変に保たれることが容易に確かめられる。逆に ${x_0}^2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 - {x_3}^2$ を不変に保つ一次変換がローレンツ変換である。

相対論的に不変な波動方程式は，上記の条件を満たす任意な時空座標の一次変換に対して不変である。このような波動方程式は，時間座標と空間座標について同じ次数の微分を含む。電磁気学のマックスウェル方程式やスカラー場のクライン・ゴルドン方程式はローレンツ不変であるが，通常の真空中でのシュレーディンガー方程式は時間と空間について対称ではない。シュレーディンガー方程式は時間について1次で，空間について2次の微分を含み，時間と空間で非対称な形であるため，明らかにローレンツ不変ではない。これは，ローレンツ不変な方程式の近似形であるとみなせる。すると，ローレンツ不変なシュレーディンガー方程式があるはずである。これを求めるのが本章の最初の課題である。

時間について1次の微分方程式，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\boldsymbol{x}) = H\psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{6.3}$$

がローレンツ不変になるためには，ハミルトニアン H は空間座標についても1次の微分で書かれる必要がある。一方この方程式が，量子論としての性質である確率保存の条件を満たすためには，ハミルトニアンはエルミートであることが必要である。時間座標と空間座標について1次微分からなり，エルミートなハミルトニアンからなる量子力学の波動方程式が，ディラックにより求められた。上の条件を満たすためには，ハミルトニアンは複素数からなる行列で表されることがわかる。ディラック方程式は複素行列で表現され，波動関数は複数

の複素数の成分をもつ。

6.2　ディラック方程式

6.2.1　ディラック方程式の導出

真空中の電子に対する相対論的に不変なシュレーディンガー方程式を求めよう。

ハミルトニアンが空間座標について 1 次の微分形で，

$$H = (-i\hbar)\nabla_j\alpha_j + m\beta \tag{6.4}$$

と表されると仮定して，まず定数係数 α_i や β についての条件を求める。波動方程式に微分を 2 回ほどこして 2 階微分方程式，

$$-\left(\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi(t,\boldsymbol{x}) = H^2\psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{6.5}$$

$$H^2 = -\hbar^2\nabla_i\nabla_j\frac{(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)}{2} + (-i)m\nabla_j(\beta\alpha_j + \alpha_j\beta) + m^2\beta^2 \tag{6.6}$$

が得られる。この方程式が前述のクライン・ゴルドン方程式に一致すれば，相対論的不変性が保証されることになる。そのためには，代数

$$\begin{aligned} \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i &= 2\delta_{ij} \\ \beta\alpha_i + \alpha_i\beta = 0, &\quad \beta^2 = 1 \end{aligned} \tag{6.7}$$

が満たされればよい。このとき，異なる α_i や β は反可換であり，それらの 2 乗は 1 である。実数や複素数は二つの積が順序に依存しない可換量である。だから，反可換である α_i や β は単なる数ではない。ところで行列は一般に可換ではない。だから，α_i や β は数ではなく行列であることがわかる。ハミルトニアンはエルミートであるので，

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \qquad \beta^\dagger = \beta \tag{6.8}$$

である。

上記の代数 (6.7) を満たす 4 個のエルミート行列の一つの解を与える。まず，パウリ行列が似た性質を示すことを確認しよう。パウリ行列は大きさが 1/2 の角運動量に対応する 2×2 行列であり

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と与えられる。パウリ行列は角運動量の交換関係，

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{6.9}$$

に加えて，反可換代数，

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij} \tag{6.10}$$

を満たすことが容易にわかる。これを使うと以下の 4×4 行列 α_i と β,

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

が代数 (6.7) を満たすことがわかる。ただし上式で $\mathbf{0}$ と $\mathbf{1}$ は 2 行 2 列の零行列と単位行列である。行列 α_i, β は要素が 1 か -1 かまたは 0 であり，またトレース (trace) が 0 である特殊な行列である。固有値の値が 1 か -1 であり，トレースが 0 である行列は偶数次元である。そのため，行列 α_i, β は代数 (6.7) から必ず偶数 × 偶数行列となるはずであり，時空四次元では 4×4 行列である。これらの性質は代数から導かれる必然的な結果であり，またディラック方程式の解の性質を決める。

上の行列 α_i, β は代数 (6.7) を満たす一つの行列であるが，これらを一つのユニタリー行列 U で

$$\alpha_i' = U\alpha_i U^\dagger \tag{6.11}$$

$$\beta' = U\beta U^\dagger \tag{6.12}$$

と変換した行列も同じ代数を満たすエルミート行列である。このようにして得られた方程式がディラック方程式である。

6.2.2　空間で一様な解

ディラック方程式の特徴を平面波解から調べよう。まず最も簡単な空間座標に依存しない零運動量の定常解は，

$$\psi_\xi(t) = e^{iEt/\hbar}u_\xi \tag{6.13}$$

の形をしている。これをディラック方程式に代入して固有値方程式，

$$Eu_\xi = m\beta u_\xi \tag{6.14}$$

を得る。β を代入して正エネルギーの固有値に対応する固有ベクトルが

$$E = m \tag{6.15}$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と得られ，負エネルギーの固有値に対応する固有ベクトルが

$$E = -m \tag{6.16}$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と得られる。正エネルギー解に加えて負エネルギー解が存在することが特徴である。負エネルギー解があるのは，行列 β が traceless であることより生ずることであり，相対論的な方程式として必然的な性質である。負エネルギー解が現れることで，出てくる新たな問題点については後で調べる。

今までは，運動量が 0 である一様な固有解について調べ，正負両符号のエネルギーをもつ定常解が存在することを見た。運動量が 0 でない場合は，ハミルトニアンに行列 α_i に比例する項が加わる。α_i も traceless であるので，ハミルトニアンも traceless となり，各運動量でエネルギー固有値の和が 0 となる。だから各運動量で正エネルギーと負エネルギーの解が対で存在することになる。

6.2.3 平面波解

次に有限な運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつ定常解の波動関数は，

$$\psi_\xi(t, \boldsymbol{x}) = e^{i(Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})/\hbar} u_\xi(\boldsymbol{p}) \tag{6.17}$$

の形をしている。これをディラック方程式に代入して固有値方程式，

$$E(\boldsymbol{p}) u_\xi(\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + m\beta) u_\xi(\boldsymbol{p}) \tag{6.18}$$

を得る。α_i や β を代入して正エネルギーの固有値に対応する固有ベクトルが，

$$E = +E(\boldsymbol{p}), \qquad p_\pm = p_x \pm i p_y \tag{6.19}$$

$$u = N(\boldsymbol{p}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z c}{E(\boldsymbol{p}) + mc^2} \\ \frac{p_+ c}{E(\boldsymbol{p}) + mc^2} \end{pmatrix}, \quad N(\boldsymbol{p}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_- c}{E(\boldsymbol{p}) + mc^2} \\ \frac{-p_z c}{E(\boldsymbol{p}) + mc^2} \end{pmatrix}$$

$$E(\boldsymbol{p}) = (m^2 + \boldsymbol{p}^2)^{1/2} \tag{6.20}$$

$$N(\boldsymbol{p}) = \left(\frac{E(\boldsymbol{p}) + mc^2}{2mc^2} \right)^{1/2} \tag{6.21}$$

となり，負エネルギーの固有値に対応する固有ベクトルが

$$E = -E(\boldsymbol{p}) \tag{6.22}$$

$$u = N(\boldsymbol{p}) \begin{pmatrix} \frac{p_z c}{E(\boldsymbol{p}) + mc^2} \\ \frac{p_+ c}{E(\boldsymbol{p}) + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N(\boldsymbol{p}) \begin{pmatrix} \frac{p_- c}{E(\boldsymbol{p}) + mc^2} \\ \frac{-p_z c}{E(\boldsymbol{p}) + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。波動関数は

$$u^\dagger(p)u(p) = N(\boldsymbol{p})^2\left(1 + \frac{\boldsymbol{p}^2}{(N(\boldsymbol{p}))^2}\right) = \frac{E}{m} \tag{6.23}$$

$$\overline{u}(p)u(p) = N(\boldsymbol{p})^2\left(1 - \frac{\boldsymbol{p}^2}{(N(\boldsymbol{p}))^2}\right) = 1 \tag{6.24}$$

と規格化されている。

各運動量ごとに正負のエネルギーをもち，また各エネルギーで二つの独立な解があることがわかる。つまり，時空四次元におけるディラック方程式は，4 行 4 列のハミルトニアンで表され，一つの運動量ごとに計 4 個の独立な解をもつ。エネルギーと運動量を決めて残る二つの自由度はスピンに対応することが後でわかる。

6.3 相対論的共変性

6.3.1 変換行列

ディラック方程式は相対論的に不変な方程式である。これを，有限運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつ解を零運動量の解から

$$u(\boldsymbol{p}) = S(p)u(\boldsymbol{p} = 0) \tag{6.25}$$

と変換する変換行列 $S(p)$ が存在することで示そう。

四元運動量は座標のローレンツ変換に対して共変な形で変換され，関係式

$$\begin{aligned} p_\mu &\to \Lambda_\mu^\nu p_\nu \\ p_\mu \cdot x^\mu &\to p_\mu \cdot x^\mu \\ m &\to m \end{aligned} \tag{6.26}$$

を満たす。このように変換される物理量をベクトルまたは 1 階のテンソルという。運動量の積 $p_\mu p_\nu$ はローレンツ変換に対して

$$p_\mu p_\nu \to \Lambda_\mu^{\mu'} \Lambda_\nu^{\nu'} p_{\mu'} p_{\nu'} \tag{6.27}$$

と 2 階のテンソルとして変換される。ただしローレンツの指数 μ と ν を縮約したときはスカラー量になり，

$$p_\mu \cdot p^\mu \to p_\mu \cdot p^\mu \tag{6.28}$$

と変換されない。同様に運動量の N 個の積は N 回のテンソルとして変換される。

解の変換行列を求めるため四元座標について対称になるように方程式を書き換えよう。式 (6.18) の両辺に β をかけて，

$$(\gamma_0 p_0 + \gamma_i p_i + m)u(p) = 0 \tag{6.29}$$
$$\gamma_0 = \beta, \qquad \gamma_i = \beta\alpha_i$$

が得られる。行列 γ_μ は反交換関係,

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = g_{\mu\nu} \tag{6.30}$$

を満たし，具体的に,

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

と表せる。質量 m はローレンツ変換に対して不変なスカラーであり，四元運動量は四元座標と同等に変換されるベクトルであるので，この表示は変換性を見るのに都合がよい。この表示は, そのため相対論的共変性を調べるのに見通しがよく，計算を相対論的に共変な形で計算を行うにも適している。変換行列 $S(p)$ と式 (6. 3. 1) を代入して，方程式は

$$(\gamma_0(\Lambda p^{(0)})_0 + \gamma_i(\Lambda p^{(0)})_i + m)S(p)u(p^{(0)}) = 0 \tag{6.31}$$

$$u(p) = S(p)u(p^{(0)}) \tag{6.32}$$

$$p^{(0)} = (m, \mathbf{0}) \tag{6.33}$$

と表せる。よって，変換行列 $S(p)$ は関係式

$$S(p)^{-1}\gamma_\mu S(p) = \Lambda_{\mu,\nu}\gamma_\nu \tag{6.34}$$

を満たす。

次に，式 (6.34) より $\Lambda_{\mu,\nu}$ が与えられたときの行列 $S(p)$ を求める。$\Lambda_{\mu,\nu}$ が 1 であるときは $S(p)$ は明らかに単位行列であり，$\Lambda_{\mu,\nu}$ が 1 からわずかにずれた無限小ローレンツ変換の場合には，$S(p)$ は単位行列からわずかにずれた行列であり比較的簡単に求まる。ϵ^α を無限小のパラメーターとして,

$$\Lambda_{\mu,\nu} = g_{\mu\nu} + \epsilon^\alpha L^\alpha_{\mu,\nu} \tag{6.35}$$

とする。$\Lambda_{\mu,\nu}$ がローレンツ変換であるから式 (6.1) で，ϵ の 1 次の項が消える条件より,

$$L^\alpha_{\mu,\nu} + L^\alpha_{\nu,\mu} = 0 \tag{6.36}$$

と $L^\alpha_{\mu,\nu}$ の反対称性が得られる。$L^\alpha_{\mu,\nu}$ の具体的な形は変換が空間回転の場合には,

$$L^\alpha_{\mu,\nu} = 1, \ (\mu,\nu) = (1,2),(2,3),(3,1) \tag{6.37}$$

となり，時間を含む回転であるブースト変換の場合には,

$$L^\alpha_{\mu,\nu} = 1, \ (\mu,\nu) = (0,1),(0,2),(0,3) \tag{6.38}$$

となる。各軸まわりの回転と各軸方向へのブースト変換で計6個の独立な変換が含まれている。変換 $S(p)$ は，

$$S(p) = 1 + i\epsilon^{\alpha}\Sigma^{\alpha}_{\mu\nu}L^{\alpha}_{\mu,\nu} \tag{6.39}$$

と展開され，式 (6.34) より，

$$[\Sigma^{\alpha}_{\mu\nu}, \gamma_{\rho}] = \frac{1}{2}i(g_{\mu\rho}\gamma_{\nu} - g_{\nu\rho}\gamma_{\mu}) \tag{6.40}$$

が得られ，$\Sigma^{\alpha}_{\mu\nu}$ が

$$\Sigma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] \tag{6.41}$$

と求まる。無限小のローレンツ変換に対する変換行列から有限のローレンツ変換に対する変換行列を求めるのは，微分が与えられたとき，積分して関数を求めるのと同じである。だから，

$$S(p) = e^{i\epsilon^{\alpha}\Sigma^{\alpha}_{\mu\nu}L^{\alpha}_{\mu\nu}} \tag{6.42}$$

となる。このようにして，変換行列が具体的に求まった。よって明らかに，ディラック方程式はローレンツ変換に対して不変的になっている。

6.3.2 スピン角運動量

ローレンツ変換の一つである座標系の空間回転を考える。このとき，波動関数を

$$\psi'(x') = S\psi(\Lambda x) \tag{6.43}$$

と変換させる行列 S から空間回転を行う生成子である角運動量が得られる。この変換式より，無限小回転の場合には

$$\Lambda = 1 + \epsilon^{\alpha}L^{\alpha}_{ij} \tag{6.44}$$

$$S = 1 + i\epsilon^{\alpha}\frac{1}{2}[\gamma^{i}, \gamma^{j}]L^{\alpha}_{ij} \tag{6.45}$$

となる。これより角運動量は座標変換からくる軌道角運動量に，行列としての変換性をもつ項が加わり

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J} &= \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{L} &= \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{S} &= \hbar\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \end{aligned} \tag{6.46}$$

となる。全角運動量は，波動関数の空間座標を回転させる軌道角運動量 $\boldsymbol{L}$ と，波動関数の行列を変換するスピノール部分からなるスピン角運動量の二つの成分からなっている。

6.3.3 スピノール

実 4×4 行列には 16 個の一次独立なものがある。これらを γ_μ の積

$$\Gamma_0 = 1 \tag{6.47}$$

$$\Gamma_i (i = 1 \sim 4) = \gamma_\mu \tag{6.48}$$

$$\Gamma_i (i = 5 \sim 11) = \sigma_{\mu\nu} = \frac{[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}{2i} \tag{6.49}$$

$$\Gamma_i (i = 12 \sim 15) = \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \tag{6.50}$$

$$\Gamma_{16} = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \tag{6.51}$$

で表す。それぞれは，互いに独立であり，

$$\mathrm{Tr}\,(\Gamma_i \Gamma_j) = \delta_{ij} \tag{6.52}$$

を満たしている。γ_5 を

$$\gamma_5 = i \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \tag{6.53}$$

と定義しておく。すると，i が 12 から 15 までの Γ_i と Γ_{16} が γ_5 を使い表せる。

$S(p)^{-1} \Gamma_i S(p)$ は

$$\begin{aligned} S(p)^{-1} 1 S(p) &= 1 \\ S(p)^{-1} \gamma_\mu S(p) &= \Lambda_{\mu,\mu'} \gamma_{\mu'} \\ S(p)^{-1} \sigma_{\mu,\nu} S(p) &= \Lambda_{\mu,\mu'} \Lambda_{\nu,\nu'} \sigma_{\mu',\nu'} \\ S(p)^{-1} \gamma_5 \gamma_\mu S(p) &= \Lambda_{\mu,\mu'} \gamma_5 \gamma_{\mu'} \\ S(p)^{-1} \gamma_5 S(p) &= \gamma_5 \end{aligned} \tag{6.54}$$

となることから，それぞれが，スカラー，ベクトル，テンソル，擬ベクトル，擬スカラーに対応することがわかる。擬ベクトルと擬スカラーは空間回転に関してはベクトルとスカラーと同じに変換されるが，後で考察する空間反転に対しては異なって変換される。

6.3.4 空間反転

空間反転は，鏡で写した座標系に変換することであり，

$$x_i \to -x_i \tag{6.55}$$

と表せる。通常のローレンツ変換は，単位変換を連続的に変形して得られるが，空間反転は単位変換を連続的に変換しては得られない。しかし元の座標系と空間反転で得られる座標系と，どちらの座標系も同等である。これは，空間反転に対して波動関数を変換する行列が存在することで示される。この行列を具体的に求めよう。式 (6.34) と同様に，変換行列 P は関係式

$$P^{-1}\gamma_i P = -\gamma_i \tag{6.56}$$

を満たす。この行列は,

$$P = \gamma_0 \tag{6.57}$$

である。また P に対して，スカラーと擬スカラーは

$$\begin{aligned} P1P &= 1 \\ P\gamma_5 P &= -\gamma_5 \end{aligned} \tag{6.58}$$

と異なる形で変換され，ベクトルと擬ベクトルは

$$\begin{aligned} P\gamma_i P = -\gamma_i,\ P\gamma_0 P = \gamma_0 \\ P\gamma_5\gamma_i P = \gamma_5\gamma_i,\ P\gamma_5\gamma_0 P = -\gamma_5\gamma_i \end{aligned} \tag{6.59}$$

と変換される。スカラーと擬スカラーの積やベクトル電流と擬ベクトル電流の内積は，回転やローレンツ変換に対して不変であるが，空間反転に対しては不変ではない。スカラーと擬スカラーや，ベクトルと擬ベクトルを区別するのが，空間反転に関する性質である。

6.4　電磁場中のディラック粒子

波動関数が4成分をもつことは，物理的に何を意味するのだろうか?　前節の結果から座標系の回転に対して波動関数の成分が混合することより，角運動量に軌道角運動量以外の成分，すなわちスピン，が含まれることがわかった。ここで詳しくディラック方程式とその解が示す物理を，電磁場が結合しているディラック方程式の解を求めることから調べよう。

6.4.1　磁気モーメント

電磁場中の荷電粒子の従う波動方程式は,

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu(x) \tag{6.60}$$

と微分を共変微分に置換して,

$$(\gamma_0(p_0 - eA_0(x)) + \gamma_i(p_i - eA_i(x)) + m)u(p) = 0 \tag{6.61}$$

と得られる。ベクトルポテンシャルの空間成分を有限に残し，磁場の効果を求める。このとき，ハミルトニアンは

$$H = \boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}) + m\beta \tag{6.62}$$

である。ハミルトニアンの2乗は,

$$H^2 = \left(\frac{1}{2}[\alpha_i, \alpha_j] + \frac{1}{2}[\alpha_i, \alpha_j]\right)(p - eA)_i(p - eA)_j + m^2$$

$$= (p - eA)_i{}^2 + e\hbar\sigma_{i,j}F_{i,j} + m^2 \tag{6.63}$$

となり，スピンと磁場の積に比例する項が出てくる。この形より，質量に比較して運動量が小さい領域では，非相対論的近似が使え，

$$H = m + \frac{(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2}{2m} + \frac{e\hbar}{2m}\sigma_{i,j}F_{i,j} \tag{6.64}$$

となることが予想される。この予想は，この式から H^2 を計算して正しいことがわかる。またユニタリー変換による対角化法を非相対論的な逐次近似と結びつける Foldy-Wouheuzen 変換を使うと，さらに任意の次数で非相対論的な展開が行える。この結果から，粒子は磁気モーメントをもつことがわかる。磁気モーメントはスピンベクトルに比例し，

$$\mu = \frac{e}{m}\boldsymbol{s} \tag{6.65}$$

$$\boldsymbol{s} = \frac{\hbar\boldsymbol{\sigma}}{2} \tag{6.66}$$

である。式 (6.64) に

$$(A_x, A_y, A_z) = \frac{B}{2}(-y, x, 0) \tag{6.67}$$

を代入して

$$H = m + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + e\frac{B}{2m}(l_z + 2s_z) + O(B^2) \tag{6.68}$$

$$l_z = xp_y - yp_x \tag{6.69}$$

となる。これより，磁気モーメントとスピン角運動量の比例係数である gyromagnetic ratio は軌道角運動量の場合の 2 倍であることがわかる。

角運動量の大きさが 1/2 であるスピンは 2 つの独立な自由度をもつ。また，それぞれが正負のエネルギーをもつことより，計 4 個の独立な自由度をもつ。ディラック方程式の波動関数の 4 成分はこれらに対応している。

6.4.2 ランダウ準位

強磁場中の相対論的電子のエネルギー準位は，非相対論的なシュレーディンガー方程式のランダウ準位とほぼ等しい。式 (6.68) からスピンに起源をもつ磁気モーメントが軌道に起源をもつ磁気モーメントと同じ大きさをもつ。これを反映して，縮退したランダウ準位が発現することが特徴である。式 (6.63) に

$$\boldsymbol{B} = (0, 0, B) \tag{6.70}$$

$$\boldsymbol{A} = (0, x, 0)B \tag{6.71}$$

を代入すると，ディラック方程式の 2 乗の固有値方程式は

$$(P_x^2 + (p_y - eBx)^2 + P_z^2 + e\sigma_z B)e^{ip_y y + ip_z z}u(x)v_\pm$$
$$= E^2 e^{ip_y y + ip_z z}u(x)v_\pm \tag{6.72}$$
$$(eB(2l + 1 \pm 1) + p_z^2)e^{ip_y y + ip_z z}u_l(x)v_\pm$$
$$= E^2 e^{ip_y y + ip_z z}u_l(x)v_\pm \tag{6.73}$$

となる。ただしスピンの固有状態と一次元調和振動子の固有関数

$$\sigma_z v_\pm = \pm v_\pm \tag{6.74}$$
$$(P_x^2 + e^2B^2(x - x_0)^2)u_l(x) = eB(2l + 1)u_l(x) \tag{6.75}$$

を使った。

強磁場中のディラック方程式の固有関数と固有値は

$$e^{ip_y y + ip_z z}u_l(x)v_+ \tag{6.76}$$
$$2eB(l + 1) + p_z^2 \tag{6.77}$$

と

$$e^{ip_y y + ip_z z}u_l(x)v_- \tag{6.78}$$
$$2eBl + p_z^2 \tag{6.79}$$

の2種類がある。これより，$e^{ip_y y + ip_z z}u_{l-1}(x)v_-$ と $e^{ip_y y + ip_z z}u_{l+1}(x)v_+$ が同じ固有値 $2eBl + p_z^2$ をもつ。スピンによる磁気モーメントの大きさと軌道による磁気モーメントの大きさが等しくなれることを反映して，縮退が生じた。また，$p_z = 0$ でスピンが負である $e^{ip_y y}u_0(x)v_-$ は，エネルギー固有値がちょうど0である。零エネルギー固有状態は，特異な物理を引き起こすことが，後の章で論ぜられる。

6.5 一体問題から多体問題へ：hole 理論

ハミルトニアンの固有状態の半分は負エネルギーをもつことがわかった。これは，実は深刻な矛盾を引き起こし，このままでは電子の理論とはなりえない。この問題点は，しかしながら，定性的に新しい物理を導く。今までは，状態空間を粒子1個に限る一体問題を考えてきた。これを拡張し，多粒子の状態空間を考える多体問題として定式化することにより，矛盾点を解決できる。

まず一体問題で考察して負エネルギー解が引き起こす問題点を詳しく見てみよう。電子は電荷をもつので電磁相互作用により光の放出や吸収を行える。だから，エネルギー定常状態にある電子は光を放出してより低いエネルギー状態に落ち込む確率が有限である。放出された光は電子から離れてしまい再吸収さ

れることはない。そのため，電子は低いエネルギー状態にとどまる。だからエネルギーに下限がある通常の物理系では励起状態は不安定であるが，最も低いエネルギーをもつ状態である基底状態は光を放出して遷移することができず安定である。ところでデイラック方程式では，下限がなく $-\infty$ までのエネルギー値をもつ固有状態が存在する。だから，すべての有限なエネルギーをもつ状態は光を放出してより低いエネルギー状態に遷移し結果として不安定になってしまう。だからエネルギーが一定の値をもつ定常状態はすべて不安定である。しかし，現実の世界で有限のエネルギーをもつ電子は安定であり，負エネルギー状態へと遷移する兆候はない。だから電子をディラック方程式で記述すると現実の世界とは異なることになる。これが負エネルギー解の存在から生ずる問題点である。負エネルギー解をもつので，方程式が間違いであると考えるのが一つの解決の方法であるが，方程式は正しく取り扱い方法が間違っていると考えるのも一方法である。この後の考えに基づいて，ディラックは空孔理論を展開した。

同種粒子の多体系の波動関数は，反対称関数か対称関数かのどちらかになる。前者では，同じ状態に一つの粒子しか占有できないパウリの排他律が成り立つ。電子が排他律に従い，かつ負エネルギー状態がすでに占有されたときには，正エネルギー状態が光を放出して負エネルギー状態に遷移することはありえない。だから，正エネルギー電子の安定性は保証される。つまり，次の二つの仮定が満たされれば，負エネルギー解の存在によって生じた問題点はなくなる。

1. 真空はすべての負エネルギー状態が電子で占有されている多体状態である。
2. 電子はパウリの排他律に従う。

二つとも大胆な仮定であり，当初正しさを信じた人は少ないかもしれない。しかしこの考えのもとで，初めて新しく“反粒子”の存在が予言された。真空を 1. のように考えると，負エネルギー状態の電子の空孔ができる。これは，正エネルギーと，正電荷をもつ電子とは逆の性質をもつ粒子，反粒子，である。電子の反粒子の存在はその後実験で検証された。その結果，ディラックの考えの正しさが証明された。

6.5.1 ディラック場の交換関係

パウリの排他律は同種粒子の多体波動関数が反対称な性質をもつとき実現する。さらに多体波動関数は，場が交換関係ではなく反交換関係に従うとき反対称になる。力学変数が従う交換関係や反交換関係は，量子論にとって最も基本的で重要な関係式であり，力学的な関係式や運動方程式もこれらの関係式より導かれる。ここで，場の反交換関係とその表現から，これらを導いてみよう。スカラー場の場合と同様に，ラグランジアンから出発するのが見通しがよい。ディラック方程式を導くラグランジアンは

$$L = \int d^3x\, \overline{\psi}(x)(\gamma_\mu \cdot p^\mu - m)\psi(x) \tag{6.80}$$

である。このラグランジアンに変分原理を課して求まる場 $\psi(x)$ についての運動方程式は，ディラック方程式になっていることが容易に確認できる。このラグランジアンより，場に共役な運動量は，

$$\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta\dot{\psi}(x)} = i\hbar\psi^\dagger(x) \tag{6.81}$$

となる。よって場の同時刻での反交換関係が

$$\{\psi^\dagger(x), \psi(y)\}\delta(x_0 - y_0) = \delta^4(x-y) \tag{6.82}$$

と決まる。力学変数である場の演算子と正準運動量の反交換関係には量子論固有のパラメーターであるプランク定数が含まれるが，場 ψ と $\psi^\dagger$ との反交換関係にはプランク定数が含まれない。

時間推進演算子であるハミルトニアンはルジャンドル変換より，

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x\, \pi(x)\dot{\psi}(x) - L \\ &= \int d^3x\, \psi^\dagger(x)(\alpha_i p_i + m\beta)\psi(x) \end{aligned} \tag{6.83}$$

となることがわかる。ハミルトニアンと場の同時刻での反交換関係を使うことより，場の時間変化を与えるハイゼンベルグ方程式は，

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) &= [H, \psi(x)] \\ &= (\alpha_i p_i + m\beta)\psi(x) \end{aligned} \tag{6.84}$$

となりディラック方程式に一致する。これらより，ディラック場を量子化することができたことがわかる。

6.5.2 フォック空間

次に場を量子化して構成されるヒルベルト空間の性質や演算子の交換関係を運動量を変数とする表示で見る。そのため座標の関数である場をフーリエ展開して

$$\psi(x)=\sum_{l=1}^{l=4}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E(\boldsymbol{p})}}e^{i(E(\boldsymbol{p})t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}u^l(\boldsymbol{p})a^l(\boldsymbol{p}) \tag{6.85}$$

と表す。上式で $u^l(\boldsymbol{p})$ は前節で求めた運動量 $\boldsymbol{p}$ に対応するディラック方程式の 4 個の解を表す。展開係数 $a^l(\boldsymbol{p})$ は古典論では固有モードの振幅を示す単なる数であるが，場を量子化したときは反交換関係に従う演算子である。この反交換関係を求めるには，上の展開式をラグランジアンに代入してラグランジアンを $a^l(\boldsymbol{p})$ とその共役量で表す。結果は，

$$L=\int d^3p\sum_{l=1}^{l=4}\left(a_l^\dagger(\boldsymbol{p})i\hbar\frac{\partial}{\partial t}a_l(\boldsymbol{p})-E_l(\boldsymbol{p})a_l^\dagger(\boldsymbol{p})a_l(\boldsymbol{p})\right) \tag{6.86}$$

となる。よって $a^l(\boldsymbol{p})$ の共役量が $a^l(\boldsymbol{p})^\dagger$ となり，反交換関係，

$$\{a^l(\boldsymbol{p})^\dagger,a^{l'}(\boldsymbol{p}')\}=\delta_{ll'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \tag{6.87}$$

$$\{a^l(\boldsymbol{p}),a^{l'}(\boldsymbol{p}')\}=0 \tag{6.88}$$

$$\{a^l(\boldsymbol{p})^\dagger,a^{l'}(\boldsymbol{p}')^\dagger\}=0 \tag{6.89}$$

が得られる。$l=1,2$ が正エネルギー解を表し $l=3,4$ が負エネルギー解を表している。明らかに，反交換関係はエネルギー $E_l(\boldsymbol{p})$ の値に無関係に決まる。

次にハミルトニアンをこの表示で表してみよう。場のフーリエ展開をハミルトニアンに代入すると，

$$H=\int d^3p\,E(\boldsymbol{p})\left(\sum_{l=1}^{l=2}(b^l(\boldsymbol{p})^\dagger b^l(\boldsymbol{p}))-\left(\sum_{l'=3}^{l'=4}b^{l'}(\boldsymbol{p})^\dagger b^{l'}(\boldsymbol{p})\right)\right) \tag{6.90}$$

が得られる。ここで反交換関係を使い，

$$H=\int d^3p\,E(\boldsymbol{p})\left(\sum_{l=1}^{l=2}\left(b^l(\boldsymbol{p})^\dagger b^l(\boldsymbol{p})+\sum_{l'=3}^{l'=4}b^{l'}(\boldsymbol{p})b^{l'}(\boldsymbol{p})\right)^\dagger-2\int d^3p\,E(\boldsymbol{p})\right) \tag{6.91}$$

と書き換える。右辺の初めの項は正定値であり，最後の項は演算子によらない定数である。エネルギーの値の原点をどこに設定してもよいので，この値を差し引いた値をエネルギーの値として使うことにしよう。これを，$:H:$ と定義する。負のエネルギー固有値をもつ状態がすべて電子で占有された状態は，

$$b^l(\boldsymbol{p})\Psi_0 = 0, \quad l = 1, 2 \tag{6.92}$$

$$b^{l'}(\boldsymbol{p})^\dagger\Psi_0 = 0, \quad l' = 3, 4 \tag{6.93}$$

と表せ,

$$:H:\Psi_0 = 0 \tag{6.94}$$

を満たす。これは真空である。また，一粒子状態は,

$$\begin{aligned} \Psi_1(\boldsymbol{p}) &= b^l(\boldsymbol{p})^\dagger\Psi_0, \quad l = 1, 2 \\ :H:\Psi_1(\boldsymbol{p}) &= E(\boldsymbol{p})\Psi_1(\boldsymbol{p}) \end{aligned} \tag{6.95}$$

と

$$\begin{aligned} \Psi_1(\boldsymbol{p}) &= b^{l'}(\boldsymbol{p})\Psi_0, \quad l' = 3, 4 \\ :H:\Psi_1(\boldsymbol{p}) &= E(\boldsymbol{p})\Psi_1(\boldsymbol{p}) \end{aligned} \tag{6.96}$$

であり，ともにエネルギー $E(\boldsymbol{p})$ をもつ。同様に正エネルギーモードに対応する二粒子状態は,

$$\begin{aligned} \Psi_2(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) &= b^l(\boldsymbol{p}_1)^\dagger b^l(\boldsymbol{p}_2)^\dagger\Psi_0, \quad l = 1, 2 \\ :H:\Psi_2(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) &= (E(\boldsymbol{p}_1) + E(\boldsymbol{p}_2))\Psi_2(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) \end{aligned} \tag{6.97}$$

と定義される。これは，運動量 $\boldsymbol{p}_1$ をもつ粒子と運動量 $\boldsymbol{p}_2$ をもつ粒子との二つの粒子がある状態ベクトルである。同様に演算子を真空状態にかけ合わせることにより，多粒子状態

$$\Psi_n(\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n) = \prod_{i=1}^{i=n} b^l(\boldsymbol{p}_i)^\dagger\Psi_0, \quad l = 1, 2 \tag{6.98}$$

が定義され, エネルギー $\sum_i E(\boldsymbol{p}_i)$ をもつ。

6.5.3 反粒子生成・消滅演算子

$l' = 3, 4$ のモードについては反粒子を表す新しい演算子を

$$\begin{aligned} b^{l'}(\boldsymbol{p}) &= d^{l'}(\boldsymbol{p})^\dagger, \quad l' = 3, 4 \\ b^{l'}(\boldsymbol{p})^\dagger &= d^{l'}(\boldsymbol{p}), \quad l' = 3, 4 \end{aligned} \tag{6.99}$$

と導入する。これらを使うことにより，粒子状態を表す状態ベクトルは，生成演算子を真空状態にかけることにより表せる。粒子演算子と反粒子演算子を使い,

$$\begin{aligned} \psi(x) = \sum_{l=1}^{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(\boldsymbol{p})}} e^{-i(E(\boldsymbol{p})t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} u^l(\boldsymbol{p}) b^l(\boldsymbol{p}) \\ + e^{i(E(\boldsymbol{p})t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} v^l(\boldsymbol{p}) d^l(\boldsymbol{p})^\dagger \end{aligned} \tag{6.100}$$

$$\psi^\dagger(x) = \sum_{l=1}^{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(\boldsymbol{p})}} e^{i(E(\boldsymbol{p})t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \overline{u}^l(\boldsymbol{p}) \gamma_0 b^l(\boldsymbol{p})^\dagger$$

$$+ e^{-i(E(\boldsymbol{p})t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\overline{v}^l(\boldsymbol{p})\gamma_0 d^l(\boldsymbol{p}) \tag{6.101}$$

$$H = \int d^3p\, E(\boldsymbol{p}) \sum_{l=1}^{2} \left(b^l(\boldsymbol{p})^\dagger b^l(\boldsymbol{p}) + d^{l'}(\boldsymbol{p})^\dagger d^{l'}(\boldsymbol{p}) \right) - 2\int d^3p\, E(\boldsymbol{p}) \tag{6.102}$$

と表せる。

このように，運動量を使う表示で，粒子状態に対応する状態ベクトルが系統的に表せる。しかも，演算子間の反交換関係より，この状態ベクトルは反対称な性質をもちフェルミ・ディラック統計に従う粒子を表している。以上のように構成された状態ベクトルは，真空状態，一粒子状態，多粒子状態等の粒子数の異なる状態を含む。だから，構成されたベクトル空間の大きさは非常に大きい。大きな空間で状態がどのように時間発展するのか，が問題になる。このため，場の理論では粒子数の異なる状態が関連し合い，大きなベクトル空間での運動の様子や状態の変化が調べられる。しかし理論に含まれるパラメーターは少ない。数少ないパラメーターで無限にたくさんの物理量が表されることになる。

6.6　時空の変換

時空座標のポアンカレ変換，

$$x_\mu \to \Lambda_{\mu\nu}x^\nu + c_\mu \tag{6.103}$$

を引き起こすヒルベルト空間上の演算子を構成しておこう。微小変換に対する変換はエルミート演算子 P_μ や $L_{\mu\nu}$ で生成される。これらは，座標変換に対するネーターの定理から導かれる保存電流の時間成分である電荷密度の空間積分として求まる。

まず $\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, $c_\mu \neq 0$ の場合を調べよう。このとき，時空座標は併進され，対応する 4 個のネーターの保存電流はエネルギー運動量テンソル，

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\nu\psi - g_{\mu\nu}L \tag{6.104}$$

$$= i\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\partial_\nu\psi(x) - g_{\mu\nu}L \tag{6.105}$$

$$= i\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\nu}\psi(x) \tag{6.106}$$

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{6.107}$$

である。第 0 成分を空間積分して多粒子ベクトル空間上での保存電荷，

$$P_0 = \int d^3T_{00} = \int d^3x\, \psi^\dagger(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + m\beta)\psi \tag{6.108}$$

$$P_i = \int d^3 T_{i0} = \int d^3x\, \psi^\dagger(-i\boldsymbol{\nabla}_i)\psi \tag{6.109}$$

が得られる。前者は前に考察したハミルトニアンそのものであり，後者は運動量演算子である。

次に $c_\mu = 0$ の場合を考える。この場合の変換は座標系の回転とローレンツ変換である。生成演算子は，

$$J^{ij} = \int d^3x\, M^{0ij} \tag{6.110}$$

$$= \int d^3x\, \psi^\dagger \left(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)^{ij} \psi \tag{6.111}$$

$$K^{0j} = \int d^3x\, M^{00j} \tag{6.112}$$

と表せることがわかるであろう。ここで，保存するテンソルは

$$M^{\mu\nu\rho} = i\hbar\overline{\psi}\gamma^\mu \left(x^\nu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - x^\lambda \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \frac{1}{4}[\gamma^\nu, \gamma^\lambda]\right)\psi \tag{6.113}$$

となる。

6.7　フォック空間と対称性の表現

フォック空間のベクトルの集まりで対称変換の表現空間を形成している。この事情をちくじ見てみよう。

真　　空

真空は最低エネルギーをもつ状態であり，すべての変換に対して不変である。変換の生成子を Q_i とすると，

$$Q_i|0\rangle = 0 \tag{6.114}$$

となり，有限の変化を引き起こすユニタリー変換，

$$U(\xi) = e^{i\xi_i Q_i} \tag{6.115}$$

に対して

$$U(\xi)|0\rangle = |0\rangle \tag{6.116}$$

となり，状態 $|0\rangle$ は不変である。

一粒子状態

運動量 $\boldsymbol{p}$ とヘリシティ λ をもつ一粒子状態 $|\boldsymbol{p}, \lambda\rangle$ は，時空間での併進の生成子であるエネルギー P_0 と運動量 P_i の固有状態であり，

$$P_0|\boldsymbol{p},\lambda\rangle = E(\boldsymbol{p})|\boldsymbol{p},\lambda\rangle \tag{6.117}$$
$$P_i|\boldsymbol{p},\lambda\rangle = p_i|\boldsymbol{p},\lambda\rangle \tag{6.118}$$

を満たしている。右辺の値 $E(\boldsymbol{p})$ や p_i が固有値である。だから有限量 $(x_0,\boldsymbol{x})$ の併進のユニタリー変換

$$U(x_0,\boldsymbol{x}) = \exp i(P_0x_0 - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{6.119}$$

に対して一粒子状態は,

$$U(x_0,\boldsymbol{x})|\boldsymbol{p},\lambda\rangle = \exp i(E(\boldsymbol{p})x_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})|\boldsymbol{p},\lambda\rangle \tag{6.120}$$

と c 数の位相因子がかけられる。このベクトルはもとのベクトルに比例しているので物理状態は不変である。

次に座標の回転やローレンツ変換を調べる。これらに対しては状態は一次変換を受ける。第 3 軸まわりの角度 β の回転は

$$U(\beta) = \exp i\beta L_{12} \tag{6.121}$$

である。この演算子を運動量が 0 である一粒子状態にかけると

$$U_{12}(\beta)|\boldsymbol{p}=0,l\rangle = \exp i\beta s_{12}|\boldsymbol{p}=0,l\rangle \tag{6.122}$$
$$= \exp \pm i\frac{\beta}{2}|\boldsymbol{p}=0,l\rangle \tag{6.123}$$

と位相因子がかかる。ここで, 状態 $|l\rangle$ が スピンの第 2 成分 s_{12} の固有状態であることを使った。第 2 軸まわりの角度 γ の回転は

$$U_{31}(\gamma)|\boldsymbol{p}=0,l\rangle = \Sigma_{l'}|\boldsymbol{p}=0,l'\rangle\langle\boldsymbol{p}=0,l'|\exp i\beta s_{31}|\boldsymbol{p}=0,l\rangle \tag{6.124}$$
$$= \Sigma_{l'}|\boldsymbol{p}=0,l'\rangle d^{1/2}_{l'l}(\gamma) \tag{6.125}$$

と回転の d 関数で表せる。この場合は, 運動量が 0 でスピンが複数の状態を重ね合わせた状態になる。3 軸方向への大きさ θ のブースト変換

$$U(\theta) = \exp i\beta K_{03} \tag{6.126}$$

は異なる運動量状態に変換させる。他の方向へのブーストも同様である。

6.8 trace formula

ディラック方程式に従う粒子に関する計算では, γ 行列がいろいろの場所で出てくる。このため計算が複雑である。しかしながら, 後で述べる摂動論の具体的な計算や遷移行列の計算には, γ 行列の積のトレースの計算がわかれば十分であることが多い。それをここでまとめておく。トレースの計算は, 代数

$$[\gamma_\mu,\gamma_\nu]_+ = 2g_{\mu\nu} \tag{6.127}$$

からすべて求まる。

まず，本文で以前出てきた，

$$\gamma_i = -\gamma_0\gamma_i\gamma_0 \tag{6.128}$$

$$\gamma_0{}^2 = 1$$

$$\gamma_0 = \gamma_1\gamma_0\gamma_1 \tag{6.129}$$

$$\gamma_i{}^2 = -1$$

より γ 行列のトレースは，

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu = 0 \tag{6.130}$$

となる。

また，

$$\mathrm{Tr}\,([\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+) = 8g_{\mu\nu} \tag{6.131}$$

$$\mathrm{Tr}\,[\gamma_\mu\gamma_\nu] = \mathrm{Tr}[\gamma_\nu\gamma_\mu] \tag{6.132}$$

より，

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu} \tag{6.133}$$

となる。同様に，奇数個の γ 行列の積 $\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2p+1}}$ のトレースは

$$\gamma_A\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2p+1}}\gamma_A = \pm\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2p+1}} \tag{6.134}$$

$$\gamma_A{}^2 = \pm 1$$

となる γ_A 行列があることより，必ず 0 になる。また 4 個の積については上記代数を使い，

$$\mathrm{Tr}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4} = 4g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_4} - 4g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_2\mu_4} + 4g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_2\mu_3} \tag{6.135}$$

が得られる。さらに，

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma^\mu &= 2g_{\mu\rho}\gamma^\mu - \gamma_\rho\gamma_\mu\gamma^\mu \\ &= 2\gamma_\rho - 4\gamma_\rho = -2\gamma_\rho \end{aligned}\tag{6.136}$$

$$\gamma_\mu\gamma_{\rho_1}\gamma_{\rho_2}\gamma^\mu = 4g_{\rho_1\rho_2} \tag{6.137}$$

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\gamma_{\rho_1}\gamma_{\rho_2}\gamma_{\rho_3}\gamma^\mu &= (2g_{\mu\rho_1} - \gamma_{\rho_1}\gamma_\mu)\gamma_{\rho_2}(2g^\mu_{\rho_3} - \gamma_{\rho_3}\gamma^\mu) \\ &= 4g_{\rho_1\rho_3}\gamma_{\rho_2} - 2\gamma_{\rho_1}\gamma_{\rho_3}\gamma_{\rho_2} - 2\gamma_{\rho_2}\gamma_{\rho_3}\gamma_{\rho_1} + \gamma_{\rho_1}\gamma^\mu\gamma_{\rho_2}\gamma_{\rho_3}\gamma^\mu \\ &= -2\gamma_{\rho_3}\gamma_{\rho_2}\gamma_{\rho_1}\end{aligned} \tag{6.138}$$

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{6.139}$$

を含む場合は，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu) = 0 \\ &\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}) = 0 \\ &\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}) = 0 \\ &\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}) = 4i\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\end{aligned} \tag{6.140}$$

となる。より多くの次数の γ 行列の積についても同様に計算される。

Dirac スピノールの絶対値の 2 乗の計算

スピノールを含む振幅は必ず，

$$f = \overline{u}(p_1, s_1) F u(p_2, s_2) \tag{6.141}$$

の形で書かれる。この振幅の絶対値を 2 乗して，スピン s_1, s_2 についてとった和

$$\begin{aligned}\sum_{s_1,s_2} |f|^2 &= \sum_{s_1,s_2} (\overline{u}(p_1,s_1)Fu(p_2,s_2))^\dagger (\overline{u}(p_1,s_1)Fu(p_2,s_2)) \\ &= \sum_{s_1,s_2} \overline{u}(p_2,s_2)\gamma_0 \overline{F} \gamma_0 u(p_1,s_1)\overline{u}(p_1,s_1)Fu(p_2,s_2)\end{aligned} \tag{6.142}$$

は γ 行列のトレースで書き換えられる。上の式でスピノールの index をあらわに書くことにより，

$$\sum_{s_1} u(p_1,s_1)_{\xi_1}\overline{u}(p_1,s_1)_{\zeta_1} = \frac{(\gamma_\mu p_1^\mu + m)_{\xi_1\zeta_1}}{2m} \tag{6.143}$$

$$\sum_{s_2} \overline{u}(p_2,s_2)_{\zeta_2} u(p_2,s_2)_{\xi_2} = \frac{(\gamma_\mu p_2^\mu + m)_{\xi_1\zeta_1}}{2m} \tag{6.144}$$

となることを使うと，さらに，振幅の絶対値の 2 乗が

$$\sum_{s_1,s_2} |f|^2 = \mathrm{Tr}\left(\frac{(\gamma_\mu p_2^\mu + m)}{2m}\gamma_0\overline{F}\gamma_0\frac{(\gamma_\mu p_1^\mu + m)}{2m}F\right) \tag{6.145}$$

となる。最終的に電子の波動関数の絶対値の 2 乗を含む確率の計算が γ 行列の積のトレースの計算に帰着された。

6.9　量子電気力学：相互作用

今までは，自由場の波動方程式を調べた。この場合，粒子は互いに相互作用しないので，前章で構成されたフォック状態の各ベクトルが，ハミルトニアンの固有状態になっている。ところが，相互作用があるとき事情は一変する。ハミルトニアンの固有状態は，大きな空間での状態ベクトルの線形結合で表せる。この固有状態を求めるのは至難のことである。そのため様々な近似的な取り扱いが使われる。一つの標準的な近似法は，相互作用の大きさを示すパラメーターである結合定数について方程式を展開し，物理量を結合定数についてべき展開の形で計算する摂動理論である。結合定数が小さいときには，摂動理論が良い近似法であることが期待される。しかしながら，場の理論では自由度の数が多いことと，ベクトル空間の大きさが非常に大きいことのため，無限大が計

算の途中で現れる。この難しい問題を解決するために，繰り込み理論が考え出された。

6.10　相互作用ラグランジアン

電荷をもつ電子と電磁場は相互作用し，ラグランジアン

$$L = \overline{\psi}(x)(\gamma_\mu \cdot (p^\mu + eA^\mu(x)) - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu,\nu}F^{\mu,\nu} + \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{6.146}$$

で記述される。電磁場に対しては，式 (4.224) の共変的なゲージ固定を使う。ラグランジアンで e を含む項，$e\psi(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu$ だけが，場について 3 次である相互作用を示す項であり，他はすべて場について 2 次である。e が電子と電磁場との相互作用を示す結合定数であり，摂動論での展開パラメーターである。

e が 0 であれば，ラグランジアンは電子場の項と電磁場の項との単純な和になっている。その結果，ハミルトニアンも二つの和となり，電子場と電磁場との両変数が完全に分離した形になる。変数分離形のハミルトニアンの固有ベクトルはそれぞれの変数に対するベクトルの単純な直積で表される。電子が電磁場と相互作用しないときは，電子状態や光子状態は定常状態になっている。

e が有限の大きさをもつときは，電子の状態空間と光の状態空間が分離せず相互作用により移り変わる。電子が光を放射する確率が有限になり，一電子状態は一電子状態と一光子状態，または多光子状態との線形結合の状態に変わる。多電子状態も同様であり，また光も電子–反電子状態との線形結合になる。相互作用の結果，粒子間に遷移が生じ，定常状態が多粒子状態の線形結合となる。また様々な散乱現象が起きる。これらの事情をまず，定常状態すなわちハミルトニアンの固有状態で詳細に見てみよう。

6.11　定常状態

上のラグランジアンよりハミルトニアンが決まる。ハミルトニアンは，場の 2 次式からなる自由項ハミルトニアンと場の 3 次式からなる相互作用ハミルトニアン，

$$H = H^{(0)} + H^{(i)} + H^{(0)}_{\text{ゲージ}} \tag{6.147}$$

$$H^{(0)} = \int d^3x \left(\psi^\dagger(x)(\alpha^i p^i + m\beta)\psi(x) + \frac{1}{2}(F_{0,i}^2 + F_{i,j}^2) \right) \tag{6.148}$$

$$H^{(0)}_{ゲージ} = \int d^3x\, \alpha \left(\frac{1}{2}\Pi_0^2 + \Pi_0(\nabla \boldsymbol{A}) \right) \tag{6.149}$$

$$H^{(i)} = e \int d^3x \psi^\dagger(x)(\alpha^i A^i(x) + eA^0(x))\psi(x) \tag{6.150}$$

に分かれる。それぞれを運動量表示で表すと，

$$H^{(0)} = \int d^3p b^\dagger(p)(\alpha^i p^i + m\beta)b(p) + \int d^3k\, \omega(\boldsymbol{k})(a^\dagger(\boldsymbol{k}, s)a(\boldsymbol{k}, s) + 1/2) \tag{6.151}$$

$$\begin{aligned} H^{(i)} = e \int d^3p_1 d^3p d^3k \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(\boldsymbol{p}_1)}} \sqrt{\frac{m}{E(\boldsymbol{p})}} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\boldsymbol{k})}} \\ \times \{ &\overline{u}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})(\gamma^\mu \epsilon_\mu(\boldsymbol{k}))u(\boldsymbol{p})b^\dagger(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{k}) \\ &+ \overline{u}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})(\gamma_\mu \epsilon^{\mu *}(\boldsymbol{k}))u(\boldsymbol{p})b^\dagger(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{k}) \\ &+ \overline{v}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})(\gamma^\mu \epsilon_\mu(\boldsymbol{k}))v(\boldsymbol{p})d^\dagger(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})d(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{k}) \\ &+ \overline{v}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})(\gamma^\mu \epsilon_\mu(\boldsymbol{k}))v(\boldsymbol{p})d^\dagger(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})d(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{k}) \\ &+ \overline{u}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})(\gamma^\mu \epsilon_\mu(\boldsymbol{k}))v(\boldsymbol{p})b^\dagger(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})d^\dagger(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{k}) \\ &+ \overline{u}(\boldsymbol{p}_1)(\gamma^\mu \epsilon_\mu(\boldsymbol{k}))v(\boldsymbol{p}_2)b^\dagger(\boldsymbol{p}_1)d^\dagger(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{k}) \\ &+ \overline{v}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})(\gamma^\mu \epsilon_\mu(\boldsymbol{k}))u(\boldsymbol{p})b(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})d(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{k}) \\ &+ \overline{v}(\boldsymbol{p}_1)(\gamma^\mu \epsilon_\mu(\boldsymbol{k}))u(\boldsymbol{p}_2)b(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})d(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{k}) \} \end{aligned} \tag{6.152}$$

$$w(\boldsymbol{k}) = |\boldsymbol{k}|, \;\; E(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \tag{6.153}$$

となる。ここで電磁場も生成消滅演算子で，

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \{a(\boldsymbol{k}, s)\epsilon_\mu(\boldsymbol{k}, s)e^{ikx} + h.c.\}$$

と表す。$H^{(i)}$ が 2^3 個の異なる項に分かれるのは，場の演算子が粒子を生成する項と消滅する項の和からなることによる。この相互作用項はそれぞれ図 6.1 のダイアグラムに対応する。さらに $H^{(0)}$ を見やすい形に書き換えることにしよう。E_0 をディラックの負エネルギーと電磁場の零点エネルギーの和として，自由ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H^{(0)} = &\int d^3p\, E(\boldsymbol{p})(b^\dagger(\boldsymbol{p}, s)b(\boldsymbol{p}, s) + d^\dagger(\boldsymbol{p}, s)d(\boldsymbol{p}, s)) \\ &+ \int d^3k\, \omega(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}, s)a(\boldsymbol{k}, s) + E_0 \end{aligned} \tag{6.154}$$

となる。$\alpha = 0$ としてこの表示を使い，まずハミルトニアンの固有状態を摂動論に基づき求めよう。

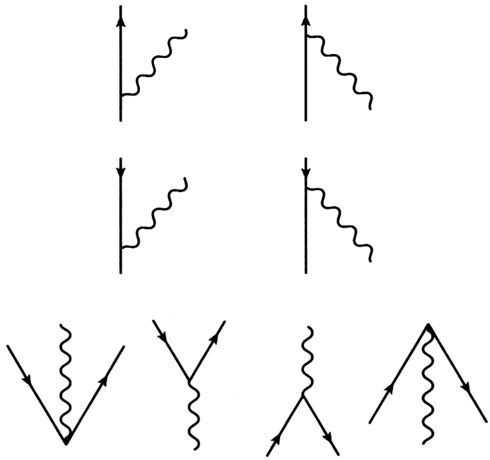


図 6.1 電子と光子の相互作用

真空状態

真空は e が 0 のときは光子の基底状態で電子も反電子もない状態 $|0\rangle$ であるので，e が有限であるときは，

$$\Psi(0) = |0\rangle + \int d\boldsymbol{q} d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2 \delta(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{q}) \times c(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}) b^\dagger(\boldsymbol{p}_1) d^\dagger(\boldsymbol{p}_2) a^\dagger(\boldsymbol{q})|0\rangle + \cdots \tag{6.155}$$

と表される。係数 $c(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q})$ は未定の c 数であり，このベクトルがハミルトニアンの固有値方程式，

$$H\Psi(0) = E_0 \Psi(0) \tag{6.156}$$

を満たす条件で E_0 とともに決定される。エネルギーは摂動展開で，

$$E_0 = E_0^{(0)} + \sum_n \langle 0|H^{(i)}|n\rangle \frac{1}{E_0^{(0)} - E_n^{(0)}} \langle n|H^{(i)}|0\rangle + O(e^2)$$
$$H^{(0)}|n\rangle = E_n^{(0)}|n\rangle \tag{6.157}$$

と表される。このオーダーで具体的にエネルギーを計算してみよう。相互作用 H^i が電子の粒子数を保存し光子数を保存しないことから，中間状態には電子の粒子数が 0 の状態が寄与する。また相互作用が空間座標について全空間で積分したものであることより，運動量も保存する。エネルギーについては，時間の全領域で積分したものは保存するが，H^i は時間積分していないので保存しない。これらの性質から，状態 $|n\rangle$ としては，1 電子，1 陽電子と 1 光子の状態

が寄与する。それぞれの運動量を $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{k}$ とすると,

$$\begin{aligned} E_n^{(0)} &= E(\boldsymbol{p}_1) + E(\boldsymbol{p}_2) + \omega(\boldsymbol{k}) \\ |n\rangle &= |\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{k}\rangle \end{aligned} \tag{6.158}$$

となる。また行列要素は,

$$\begin{aligned} \langle n|H^{(i)}|0\rangle &= e\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k})}}\sqrt{\frac{m}{E(\boldsymbol{p}_1)}}\sqrt{\frac{1}{2\omega(\boldsymbol{k})}}u^\dagger(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k}) \\ &\quad \times (\alpha^i\epsilon^i(\boldsymbol{q}) + \epsilon^0(\boldsymbol{k}))v(\boldsymbol{p}_1)\delta(\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k}) \qquad (6.159) \\ \langle 0|H^{(i)}|n\rangle &= \langle n|H^{(i)}|0\rangle^\dagger \end{aligned}$$

であることより,

$$c(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{k}) = \frac{1}{-E(\boldsymbol{p}_1) - E(\boldsymbol{p}_2) - \omega(\boldsymbol{k})}\langle 0|H_{\rm int}|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{k}\rangle \tag{6.160}$$

となる。これらを代入して,結果

$$\begin{aligned} \delta E &= \int d^3p_1 d^3p_2 d^3k (\delta(\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k}))^2 e^2 \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m}{E(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k})} \\ &\quad \times \frac{m}{E(\boldsymbol{p}_1)}\frac{1}{2\omega(\boldsymbol{k})}|u^\dagger(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k})(\alpha^i\epsilon^i(\boldsymbol{k}) + \epsilon^0(\boldsymbol{k}))v(\boldsymbol{p}_1)|^2 \\ &\quad \times \frac{1}{-E(\boldsymbol{p}_1) - E(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k}) - \omega(\boldsymbol{k})} \qquad (6.161) \\ &= -e^2\delta(\boldsymbol{0})\int d^3p_1 d^3k \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m}{E(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k})}\frac{m}{E(\boldsymbol{p}_1)}\frac{1}{2\omega(\boldsymbol{k})} \\ &\quad \times |u^\dagger(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k})(\alpha^i\epsilon^i(\boldsymbol{k}) + \epsilon^0(\boldsymbol{k}))v(\boldsymbol{p}_1)|^2 \frac{1}{E(\boldsymbol{p}_1) + E(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k}) + \omega(\boldsymbol{k})} \qquad (6.162) \end{aligned}$$

が得られる。

$$\delta(\boldsymbol{0}) = \int d^3x \tag{6.163}$$

を使うことから,このエネルギー積分が空間の体積に比例することがわかる。また体積あたりのエネルギーすなわちエネルギー密度は積分で表されるが,この積分は発散することが容易にわかる。

粒子状態

一粒子状態についても真空と同様に計算することができる。相互作用により運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつ 1 電子状態 $|\boldsymbol{p}\rangle$ が 1 電子と 1 光子状態に遷移するので,固有状態はそれらを重ね合わせた状態,

$$\Psi_{\text{電子}}(\boldsymbol{p}) = b^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle + \int d\boldsymbol{k}\, c'(\boldsymbol{k})b^\dagger(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle + \cdots \tag{6.164}$$

となる。ハミルトニアンの固有値方程式 (6.156) に代入して係数 $c'(\boldsymbol{k})$ と，エネルギーが

$$c'(\boldsymbol{k}) = \frac{\overline{u}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\gamma^{\mu}u(\boldsymbol{p})\epsilon_{\mu}(\boldsymbol{k})}{E(\boldsymbol{p})-E(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})-\omega(\boldsymbol{k})} \tag{6.165}$$

$$\begin{aligned}\delta E &= \int d^3p_1 d^3k(\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{k}))^2 e^2 \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m}{E(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k})}\frac{m}{E(\boldsymbol{p})}\frac{1}{2\omega(\boldsymbol{k})} \\ &\quad \times |u^{\dagger}(\boldsymbol{p})(\alpha^i\epsilon^i(\boldsymbol{k})+\epsilon^0(\boldsymbol{k}))u(\boldsymbol{p}_1)|^2 \frac{1}{E(\boldsymbol{p})-E(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})-\omega(\boldsymbol{k})} \qquad (6.166) \\ &= -e^2\delta(\vec{0})\int d^3p_1 d^3k \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m}{E(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{k})}\frac{m}{E(\boldsymbol{p}_1)}\frac{1}{2\omega(\boldsymbol{k})} \\ &\quad \times |u^{\dagger}(\boldsymbol{p})(\alpha^i\epsilon^i(\boldsymbol{k})+\epsilon^0(\boldsymbol{k}))v(\boldsymbol{p}_1)|^2 \frac{1}{E(\boldsymbol{p})-E(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})-\omega(\boldsymbol{k})} \qquad (6.167)\end{aligned}$$

と決まる。電子のエネルギーの補正がやはり発散する。

同様に一光子状態は相互作用により電子–陽電子対に遷移するので，固有状態は一光子状態と電子–陽電子対状態の線形結合

$$\Psi_{光子}(\boldsymbol{q}) = a^{\dagger}(\boldsymbol{q})|0\rangle + \int d\boldsymbol{p}c''(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})b^{\dagger}(\boldsymbol{p})d^{\dagger}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})|0\rangle + \cdots \tag{6.168}$$

となる。これを固有値方程式 (6.156) に代入してエネルギーが

$$\begin{aligned}\delta E &= \int d^3p_1 d^3p_2(\delta(\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{k}))^2 e^2 \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m}{E(\boldsymbol{p}_1)}\frac{m}{E(\boldsymbol{p}_2)}\frac{1}{2\omega(\boldsymbol{k}_1)} \\ &\quad \times |u^{\dagger}(\boldsymbol{p}_1)(\alpha^i\epsilon^i(\boldsymbol{k}_1)+\epsilon^0(\boldsymbol{k}_1))v^{\dagger}(\boldsymbol{p}_1)|^2 \frac{1}{-E(\boldsymbol{p}_1)-E(\boldsymbol{p}_2)+\omega(\boldsymbol{k})} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (6.169) \\ &= -e^2\delta(\boldsymbol{0})\int d^3p_1 d^3p_2 \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m}{E(\boldsymbol{p}_1)}\frac{m}{E(\boldsymbol{p}_2)}\frac{1}{2\omega(\boldsymbol{k})} \\ &\quad \times |u^{\dagger}(\boldsymbol{p}_1)(\alpha^i\epsilon^i(\boldsymbol{k}_1)+\epsilon^0(\boldsymbol{k}_1))v^{\dagger}(\boldsymbol{p}_2)|^2 \frac{1}{-E(\boldsymbol{p}_1)-E(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)+\omega(\boldsymbol{k})} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (6.170)\end{aligned}$$

と決まる。

多粒子状態やそのエネルギーも同様に決定される。これらの計算から次の様々な問題点が見えてくる。

1. 積分が発散する。
2. 運動量の空間成分に関する積分であるのでローレンツ不変な計算になっていない。

これらを解決する方法が，相互作用表示による繰り込みである。

6.12　状態の時間発展方程式：相互作用表示

摂動論の計算をローレンツ共変な形で行うにはどうしたらよいだろうか？ハミルトニアンは時間方向の平行移動を引き起こす生成演算子であるため，ハミルトニアンの固有状態は共変性が自明でなく共変的な計算にはあまり向いていない。共変的な計算を行うのに便利な表示は，相互作用表示である。以下相互作用表示に基づいて状態ベクトルの時間発展を調べる。状態が従うシュレーディンガー方程式は，

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi &= H\Psi \\
H &= H_0 + H_i
\end{aligned}
\tag{6.171}
$$

である。これから，状態や演算子を H_0 により生成されるユニタリー変換で変換する。

$$
\begin{aligned}
\Psi_i &= e^{H_0/i\hbar t}\Psi \\
O_i &= e^{H_0/i\hbar t}Oe^{-H_0/i\hbar t}
\end{aligned}
\tag{6.172}
$$

この変換された状態ベクトルは，

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_i &= H_i(t)\Psi_i \\
H_i(t) &= e^{H_0/i\hbar t}H_1e^{-H_0/i\hbar t}H_i
\end{aligned}
\tag{6.173}
$$

を満たす。この方程式はハミルトニアンが時間に依存するシュレーディンガー方程式であり，方程式の解は展開した形で，

$$
\Phi(t,\boldsymbol{x}) = U(t,t_0)\Phi(t_0,\boldsymbol{x}) \tag{6.174}
$$

$$
\begin{aligned}
U(t,t_0) = 1 &+ \int_{t_0}^{t}\frac{dt_1}{i\hbar}H_i(t_1) + \int_{t_0}^{t}\frac{dt_1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t_1}\frac{dt_2}{i\hbar}H_i(t_1)H_i(t_2) + \cdots \\
&+ \int_{t_0}^{t}\frac{dt_1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t_1}\frac{dt_2}{i\hbar}\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\frac{dt_n}{i\hbar}H_i(t_1)H_i(t_2)H_i(t_3)\cdots H_i(t_n) + \cdots
\end{aligned}
$$

と表せる。演算子 $U(t_1,t_2)$ は，また

$$
\begin{aligned}
U(t_0,t_0) &= 1 \\
U(t_2,t_1)U(t_1,t_0) &= U(t_2,t_0)
\end{aligned}
\tag{6.175}
$$

を満たしている。演算子 $U(t_1,t_2)$ が，すべての状態の時間発展を決める。展開の高次項は，時間積分の上限が他の積分変数による形をしている。このため，各項がわかりにくい形をしている。積分の上限が他の積分変数によらない形に書き換えるため，演算子の積を時間順序に並べる操作，T 積を導入する。二つのボソン的演算子 $B(t)$ とフェルミオン的な演算子 $F(t)$ の T 積は，

$$T(B(t_1)B(t_2)) = \theta(t_1 - t_2)B(t_1)B(t_2) + \theta(t_2 - t_1)B(t_2)B(t_1) \qquad (6.176)$$

$$T(F(t_1)F(t_2)) = \theta(t_1 - t_2)F(t_1)F(t_2) - \theta(t_2 - t_1)F(t_2)F(t_1) \qquad (6.177)$$

と時間の順に並べた積で定義される。n 個の演算子 $H_i(t)$ の T 積を使い，$U(t, t_0)$ は

$$U(t, t_0) = 1 + \int_{t_0}^{t} \frac{dt_1}{i\hbar} H_i(t_1) + \int_{t_0}^{t} \frac{dt_1}{i\hbar} \int_{t_0}^{t} \frac{dt_2}{i\hbar} T(H_i(t_1)H_i(t_2)) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} \frac{dt_1}{i\hbar} \int_{t_0}^{t} \frac{dt_2}{i\hbar} \cdots \int_{t_0}^{t} \frac{dt_n}{i\hbar} T(H_i(t_1)H_i(t_2)H_i(t_3) \cdots H_i(t_n)) + \cdots \qquad (6.178)$$

と書かれる。演算子 $U(t_1, t_2)$ によりすべての状態の時間発展が決まる。このため，この演算子はきわめて重要であり，様々な計算で現れる。

例えば $t = -\infty$ での相互作用表示の真空のケットベクトルは，有限な時刻 t では，

$$|t\rangle = U(t, -\infty)|0\rangle \qquad (6.179)$$

となり，さらに $t = +\infty$ では，

$$|\infty\rangle = U(+\infty, -\infty)|0\rangle \qquad (6.180)$$

となる。逆に $t = +\infty$ での相互作用表示の真空のブラベクトルは，有限な時刻 t では，

$$\langle t| = \langle 0|U(\infty, t) \qquad (6.181)$$

となる。二つの真空の重なりは，

$$\langle out, 0|in, 0\rangle = \langle 0|U(+\infty, -\infty)|0\rangle \qquad (6.182)$$

で与えられる。

6.12.1 伝播関数

電子の伝播関数

伝播関数は相互作用がない自由場の理論で波の伝播の様子を示す量であり，propagator ともいわれる。電子場の伝播関数は，

$$\begin{aligned} S_F^0(x - y) &= -i\langle 0|T(\psi(x)\overline{\psi}(y))|0\rangle \\ &= -i\theta(x_0 - y_0)\langle 0|\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle \\ &\quad + i\theta(y_0 - x_0)\langle 0|\overline{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle \end{aligned} \qquad (6.183)$$

と 2 点関数に $-i$ をかけて定義される。これにディラック演算子をかけ，場の同時刻反交換関係を使うと，

$$
\begin{aligned}
(\gamma_\mu p^\mu - m)(-i)\langle 0|T(\psi(x)\overline{\psi}(y))|0\rangle &= \delta(x_0 - y_0)\langle 0|[\psi(x), \psi(y)^\dagger]_+|0\rangle \\
&= \delta^4(x-y) \qquad (6.184)
\end{aligned}
$$

となる。つまり伝播関数 $S_F(x-y)$ は微分演算子 $(\gamma_\mu p^\mu - m)$ の逆であるグリーン関数 $(\gamma_\mu p^\mu - m)^{-1}$ である。フーリエ変換すると伝播関数は，

$$
\begin{aligned}
S_F^0(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} e^{ipx} S_F^0(p) \\
S_F^0(p) &= \frac{1}{\gamma_\mu p^\mu - m} = \frac{\gamma_\mu p^\mu + m}{p^2 - m^2}
\end{aligned}
\qquad (6.185)
$$

と運動量の簡単な有理型関数となる。

光子の伝播関数

光子場の伝播関数は，

$$
\begin{aligned}
D_{\mu\nu}^0(x-y) &= -i\langle 0|T(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2))|0\rangle \\
&= -i\theta(x_0 - y_0)\langle 0|A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0\rangle \\
&\quad - i\theta(y_0 - x_0)\langle 0|A_\nu(x_2)A_\mu(x_1)|0\rangle \qquad (6.186)
\end{aligned}
$$

とやはり $-i$ をかけて定義される。これに有限の α でゲージ固定した光子場に対する微分演算子をかけ，場の同時刻交換関係を使うと，

$$
\begin{aligned}
&\left(g_{\mu\nu}\partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right)(-i)\langle 0|T(A_\nu(x)A_\rho(y))|0\rangle \\
&= \delta(x_0 - y_0)(-i)\langle 0|[\Pi_\mu(x),\ A_\rho(y)]|0\rangle \\
&= \delta^4(x-y)g_{\mu\rho} \qquad (6.187)
\end{aligned}
$$

となる。つまり伝播関数は微分演算子 $(g_{\mu\nu}\partial^2 - (1 - \frac{1}{\alpha})\partial_\mu\partial_\nu)$ の逆のグリーン関数である。これをフーリエ変換すると，

$$
\begin{aligned}
D_{\mu\nu}^0(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} e^{ip(x-y)} D_{\mu\nu}^0(p) \\
D_{\mu\nu}^0(p) &= \frac{1}{p^2}\left(g_{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)
\end{aligned}
\qquad (6.188)
$$

とやはり運動量の簡単な有理型関数となる。α はゲージ固定のパラメーターである。相対論的な場の理論の伝播関数は必ず運動量の簡単な有理関数となる。このため，様々な具体的な計算を行うのに，運動量を使う表示が最も見通しよい。

ファインマン ダイアグラム

ここで真空の重なり $\langle out, 0|in, 0\rangle$ を具体的に計算してみよう。式 (6.178) を式 (6.182) に代入して得られる，

$$\langle out, 0|in, 0\rangle$$
$$= \left\langle 0 \middle| \left(1 + \int \frac{d^4x_1}{i\hbar} T(H_i(x_1)) + \frac{1}{2!} \int \frac{d^4x_1}{i\hbar} \frac{d^4x_2}{i\hbar} T(H_i(x_1)H_i(x_2)) + \cdots \right.\right.$$
$$\left.\left. \frac{1}{n!} \int \frac{d^4x_1}{i\hbar} \frac{d^4x_2}{i\hbar} \cdots \frac{d^4x_n}{i\hbar} T(H_i(x_1)H_i(x_2)\cdots H_i(x_n)) + \cdots \right) \middle| 0 \right\rangle \tag{6.189}$$

で $H_i(x)$ について1次の項は真空期待値が0になる。だから $H_i(x)$ について2次の項から始まる。この計算には，Wick の定理を使うのが便利である。

Wick の定理

T 積の真空期待値は電子場の伝播関数と光の伝播関数からなる可能な組合せに対応する振幅の和で与えられる。

これより $\hbar = 1$ となる単位系を使おう。2次の摂動項は

$$\int dt_1 dt_2 \langle 0|T(H_i(t_1)H_i(t_2))|0\rangle$$
$$= e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \mathrm{Tr}((-i)\gamma_\mu i S_F^0(x_1 - x_2)(-i)\gamma_\nu i S_F^0(x_2 - x_1)) i D_{\mu\nu}^0(x_1 - x_2) \tag{6.190}$$

と時空座標について対称的な積分で表される。これは，ダイアグラムでは図6.2と表される。

同様に真空ではない状態間の遷移を引き起こす項が出てくる。それらすべてが対応するダイアグアラム，図6.3で表される。これらの積分はすべて時間座標と空間座標に関して対称的な形をしている。積分計算やそれらの和を求めるに際して，ダイアグラムを使うことで見通しよく正確に計算を行える。

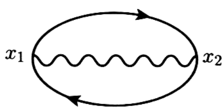
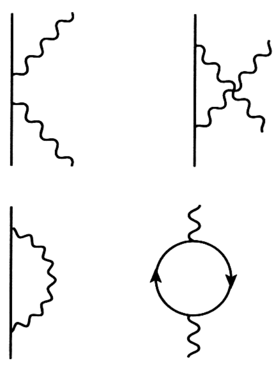


図 6.2 真空のダイアグラム


図 6.3 2次摂動

6.13 グリーン関数

相互作用表示で場の真空期待値,

$$\langle 0|T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\cdots\varphi(x_n))|0\rangle \tag{6.191}$$

や

$$\langle 0|T(\psi(x_1)\psi(x_2)\cdots\psi(x_n)\overline{\psi}(y_1)\overline{\psi}(y_2)\cdots \\ \overline{\psi}(y_n)A_{\mu_1}(z_1)A_{\mu_2}(z_2)\cdots A_{\mu_p}(z_p))|0\rangle \tag{6.192}$$

を考えよう。これを n 点グリーン関数や $2n+p$ 点グリーン関数という。グリーン関数から様々な物理量が求まるので，グリーン関数は場の理論における基本的な量である。これらの例は図 6.3 で与えられている。

6.13.1 2 点関数と繰り込み

電子の 2 点関数

2 点グリーン関数は相互作用がない自由場の理論で波の伝播の様子を示す特別の意味をもつ量であった。では，相互作用の効果で 2 点グリーン関数はどう変わるのだろうか? これがわかれば相互作用している系での電子の伝播の仕方や質量がわかることになる。相互作用の効果を含めた電子 2 点関数は,

$$\langle 0|T(\psi(x)\overline{\psi}(y))U(\infty,-\infty)|0\rangle \tag{6.193}$$

である。ここに，$U(t_1,t_2)$ を代入して，e^2 のオーダーで,

$$\begin{aligned}&\langle 0|T(\psi(x)\overline{\psi}(y))U(\infty,-\infty)|0\rangle \\ &= ie^2\int d^4z_1d^4z_2\,\mathrm{Tr}\,(iS_F^0(x-z_1) \\ &\quad\times(-i)\gamma_\mu iS_F^0(z_1-z_2)(-i)\gamma_\nu iS_F^0(z_2-y))iD_0^{\mu\nu}(z_1-z_2)\end{aligned} \tag{6.194}$$

となる。これのダイアグラムは図 6.4 である。電子の伝播関数を 2 点関数からのフーリエ変換で

$$\begin{aligned}&i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1-p_2)S_F^0(p_1) \\ &= \int d^4x_1d^4x_2e^{i(p_1x_1-p_2x_2)}\langle 0|T(\psi(x)\overline{\psi}(y))U(\infty,-\infty)|0\rangle\end{aligned} \tag{6.195}$$

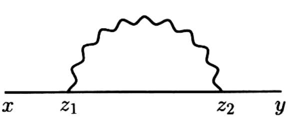


図 6.4 電子の自己エネルギー

とすると，e^2 までの次数で $S_F(p)$ は

$$iS_F(p) = iS_F^0(p) + iS_F^0(p) i\Sigma(p) iS_F^0(p) \tag{6.196}$$

$$\Sigma(p) = -(e\mu^{2-\omega})^2 \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \gamma_\mu \frac{1}{\gamma(p-k)+m} \gamma_\nu \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2} \tag{6.197}$$

で与えられる。$\Sigma(p)$ は自己エネルギーとよばれ，相互作用の効果を受けて変わる波の伝播を示している。ファインマンパラメーターを導入し積分を N 次元法で計算し，

$$\Sigma(p) = -(e\mu^{2-\omega})^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\gamma_\mu(\gamma(p-k)-m)\gamma_\nu}{[k^2(1-x)+m^2x+(p-k)^2x]^2} \tag{6.198}$$

を得る。積分運動量を k から $k' = k - px$ に変換した後，k' 積分を N 次元法で実行する。結果は，$\epsilon = D - 4$ として

$$\begin{aligned} i\Sigma(p) &= \frac{i}{\epsilon}\frac{e^2}{16\pi^2}[\gamma p + 4m] + i\frac{e^2}{8\pi^2}\left[\frac{1}{2}p\gamma(1+\gamma) + m(1+2\gamma)\right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dx[p\gamma(1-x)+2m]\ln\left(\frac{p^2x(1-x+m^2)}{4\pi\mu^2}\right)\right] + O(\epsilon) \end{aligned} \tag{6.199}$$

となる。

伝播関数は，自己エネルギーの補正をすべて取り入れた等比級数の和から，

$$S_F(p) = \frac{1}{\gamma p + m - \Sigma(p)} \tag{6.200}$$

となる。(6.199) を代入して極の位置は，$\gamma p + m = 0$ からずれ，留数は $1 + K_2$ となる。ただし，K_2 の発散部は

$$K_2 = \frac{1}{\epsilon}\frac{e^2}{16\pi^2} \tag{6.201}$$

である。

光子の伝播関数

光子の 2 点関数は同様に

$$\langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(y))U(\infty, -\infty)|0\rangle \tag{6.202}$$

である。$U(t_1, t_2)$ を代入して，e^2 のオーダーで，

$$\begin{aligned} &\langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(y))U(\infty, -\infty)|0\rangle \\ &\quad = e^2 \int d^4z_1 d^4z_2 iD_0^{\mu\mu_1}(x-z_1)\mathrm{Tr}\big(iS_F^0(z_1-z_2) \\ &\qquad \times (-i)\gamma_{\mu_1} iS_F^0(z_2-z_1)(-i)\gamma_{\nu_1}\big) iD_0^{\nu_1\nu}(z_2-y) \end{aligned} \tag{6.203}$$

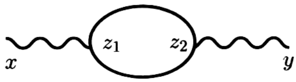


図 6.5　光子の自己エネルギー

となる。これのダイアグラムは図 6.5 である。光子の伝播関数を光子の 2 点関数からのフーリエ変換で

$$i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1-p_2)D_{\mu\nu}(p_1) = \int d^4x_1 d^4x_2\, e^{i(p_1x_1-p_2x_2)}\langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(y))U(\infty,-\infty)|0\rangle \quad (6.204)$$

と定義すると，

$$D_{\mu\nu}(p_1) = D^{(0)}_{\mu\nu}(p_1) + D^{(0)}_{\mu\rho}(p_1)\Pi_{\rho\sigma}D^{(0)}_{\sigma\nu}(p_1) + \quad (6.205)$$

と分解して表される。$\Pi_{\rho\sigma}$ は真空分極とよばれ，N 次元法で $\epsilon = D-4$ を使い，

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = -(e\mu^{2-\omega})^2\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{\mathrm{Tr}\,[\gamma_\mu(k\gamma+p\gamma-m)\gamma_\nu(k\gamma-m)]}{(k^2+m^2)((p+k)^2+m^2)}$$
$$= \left(g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\Pi(p^2) \quad (6.206)$$
$$\Pi(p^2) = -p^2\frac{e^2}{2\pi^2}\left[\frac{1}{6\epsilon}-\frac{1}{6}\gamma-\int_0^1 x(1-x)\ln\left(\frac{m^2+p^2x(1-x)}{2\pi\mu^2}\right)+O(\epsilon)\right]$$

と計算される。電流演算子が保存則を満たすことから，真空分極は必ず

$$p^\mu\Pi_{\mu\nu}(p) = 0 \quad (6.207)$$
$$\Pi_{\mu\nu}(p)p^\nu = 0 \quad (6.208)$$

を満たすことがわかる。これより，真空分極についての高次項を等比級数として求めて，光子の伝播関数が

$$D_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2-\Pi(p)}\left(g_{\mu,\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)+\alpha\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \quad (6.209)$$

と求まる。$\Pi(0)=0$ であるので，$p^2=0$ における極の位置は変わらないが，極における留数が 1 とは異なっている。

真空分極は current のグリーン関数 になっている。

current だけを含むグリーン関数

$$\pi_{\mu\nu}(x-y) = \langle 0|T(j_\mu(x)j_\nu(y))|0\rangle \quad (6.210)$$

は摂動の最低次で，

$$\langle 0|T(j_\mu(x)j_\nu(y))|0\rangle = \mathrm{Tr}\left((-i)\gamma_\mu iS^0_F(x-y)\right)(-i)\gamma_\nu iS^0_F(y-x) \quad (6.211)$$

となる。

6.13.2 current と場を含むグリーン関数と vertex の繰り込み

電流演算子と電子場で定義されるグリーン関数,

$$\langle 0|T(\psi(x)\overline{\psi}(y)j_\mu(z))|0\rangle \tag{6.212}$$

は自由場の場合では,

$$\langle 0|T(\psi(x)\overline{\psi}(y)j_\mu(z))|0\rangle = iS_F^0(x-z)(-i)\gamma_\mu iS_F^0(z-y) \tag{6.213}$$

である。このグリーン関数は, 相互作用により修正を受けて e^2 のオーダーで,

$$\begin{aligned}&\langle 0|T(\psi(x)\overline{\psi}(y)j_\mu(z))U(+\infty,-\infty)|0\rangle\\ &\quad=\int dz_1dz_2 iS_F^0(x-z_1)(-i)\gamma_{\mu_1}iS_F^0(z_1-z)(-i)\gamma_\mu iS_F^0(z-z_2)\\ &\qquad\times(-i)\gamma_{\mu_2}iS_F(z_2-y)iD_0^{\mu_1\mu_2}(z_1-z_2)\end{aligned} \tag{6.214}$$

となる。図 6.6 のダイアグラムが対応している。さらに vertex 部分 $\Gamma_\mu(p_1,p_2,q)$ を

$$\begin{aligned}&i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1-p_2-q)S_F^0(p_1)\Gamma_\mu(p_1,p_2,q)S_F^0(p_2)\\ &\quad=\int d^4x_1d^4x_2d^4y\, e^{i(p_1x_1-p_2x_2-qx)}\langle 0|T(j_\mu(y)\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2))|0\rangle\end{aligned} \tag{6.215}$$

とし,

$$\Gamma_\mu(p_1,p_2,q)=\gamma_\mu+\Lambda_\mu(p_1,p_2,q) \tag{6.216}$$

とおく。$\Lambda_\mu(p_1,p_2,q)$ は

$$\begin{aligned}&\Lambda_\mu(p_1,p_2,q)\\ &\quad=-i(e\mu^{2-\omega})^3\int\frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\gamma_\lambda\frac{1}{\gamma(p_1+k)+m}\gamma_\mu\frac{1}{\gamma(p_2+k)+m}\gamma_\sigma\frac{g_{\lambda\sigma}}{k^2}\\ &\quad=-2i(e\mu^{2-\omega})^3\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int\frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\times A\end{aligned} \tag{6.217}$$

となる。ここで k_α について偶関数が有限な積分値を与え, 奇関数の積分は 0 となることより,

$$A=A_1+A_2 \tag{6.218}$$

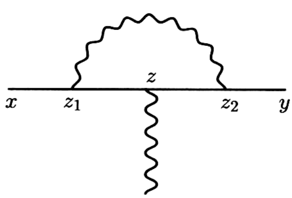


図 6.6 vertex 部

$$A_1 = \frac{k_\alpha k_\beta \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\sigma}{[k^2 + m^2(x+y) + p_1^2 x(1-x) + p_2^2 y(1-y) - 2p_1 \cdot p_2 xy]^3} \tag{6.219}$$

$$\to \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\sigma \frac{k^2}{[k^2 + m^2(x+y) + p_1^2 x(1-x) + p_2^2 y(1-y) - 2p_1 \cdot p_2 xy]^3} \tag{6.220}$$

$$A_2 = \frac{\gamma_\sigma[-p_2\gamma y + p_1\gamma(1-x) - m]\gamma_\mu[-p_1\gamma x + p_2\gamma(1-y) - m]\gamma_\sigma}{[k^2 + m^2(x+y) + p_1^2 x(1-x) + p_2^2 y(1-y) - 2p_1 \cdot p_2 xy]^3} \tag{6.221}$$

である。ガンマ行列の積の公式,

$$\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma^\mu = -2\gamma_\rho \tag{6.222}$$

より,

$$\gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\sigma = 4\gamma_\mu \tag{6.223}$$

となり, A_1 は

$$A_1 = 4\gamma_\mu \frac{k^2}{[k^2 + m^2(x+y) + p_1^2 x(1-x) + p_2^2 y(1-y) - 2p_1 \cdot p_2 xy]^3} \tag{6.224}$$

となる。このため, A_1 はガンマ行列 γ_μ に比例し積分は発散する。しかし, A_2 はガンマ行列の複数個の積に比例し, 積分が収束する。後で議論する磁気モーメントは A_2 から出る項であり, 有限な値が計算される。

さて, いくつかのグリーン関数を座標の積分形で表し, 次に運動量を使う積分形で表した。自由場の伝播関数は運動量の単純な有理型関数であるので, 高次計算を行うには, 運動量に関する積分形を使うのが簡単である。

6.13.3 Ward–高橋恒等式

電流演算子 $j_\mu(x)$ を含むグリーン関数は, 電流演算子の性質を反映している。保存則,

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \tag{6.225}$$

から, 電流演算子を含むグリーン関数は, 恒等式

$$\begin{aligned}
&\partial^\mu \langle 0|T(\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)j_\mu(z))|0\rangle \\
&\quad = \langle 0|T([j_0(x), \psi(x_1)]\psi(x_2))|0\rangle \delta(x^0 - x_1^0) \\
&\qquad + \langle 0|T(\psi(x_1)[j_0(x), \overline{\psi}(x_2))]|0\rangle \delta(x^0 - x_2^0)
\end{aligned} \tag{6.226}$$

を満たす。この際, 上の変形で,

$$\partial^\mu \theta(z_0 - x_0) = \delta_{\mu,0}\delta(z_0 - x_0) \tag{6.227}$$

を使った。さらに, 電荷密度と場との同時刻交換関係

$$[j^0(z),\psi(x)]\delta(z_0-x_0)=-\psi(x)\delta^{(4)}(z-x)$$
$$[j^0(z),\overline{\psi}(x)]\delta(z_0-x_0)=\overline{\psi}(x)\delta^{(4)}(z-x) \tag{6.228}$$

を使い，上の式を，

$$\partial^\mu\langle 0|T(\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)j_\mu(z))|0\rangle$$
$$=\langle 0|T(\psi(x_1)\psi(x_2))|0\rangle\delta^4(x-x_1)-\langle 0|T(\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2))|0\rangle\delta^4(x-x_2) \tag{6.229}$$

と変形できる。結果は電流演算子を含むグリーン関数と，電流演算子を含まないグリーン関数が独立ではなく関係していることを示している。さらに，この関係式を運動量表示で表してみよう。Ward–高橋恒等式は，運動量表示でvertex 部分に対して，

$$iq_\mu\Gamma^\mu(p+q,p)=S_F^{-1}(p+q)-S_F^{-1}(p) \tag{6.230}$$

と簡単な形となる。さらに，q を無限小の大きさにとると，

$$i\Gamma^\mu(p,p)=\frac{\partial}{\partial p_\mu}S_F^{-1}(p) \tag{6.231}$$

となる。この式を Ward–高橋恒等式といい，電荷をもつ場が，相互作用するとき vertex 部分が厳密に満たす恒等式である。

6.13.4 無限大の繰り込み

式 (6.199)，式 (6.207)，式 (6.217) の積分は発散する。つまり, 伝播関数の極での振る舞いから，質量が発散し極の留数がやはり発散することがわかる。また，vertex 部分の振る舞いから，電荷も発散する。相互作用のために，相互作用のない自由場としたときと，相互作用がある系ではいくつかの量に無限大の差が生ずる。ではこの差を観測することは可能であろうか? もしも，相互作用のない系と相互作用がある系との両方が実在すれば，比較を行うことができる。しかしながら，自然界ではいつも相互作用があり，相互作用のない系は存在しない。だから，相互作用のないときの電荷や質量は観測にかかるわけではない。だから無限大が積分から出てきても，相互作用があるときの質量が実験で見える質量であるとすれば，なんら問題ない。この取り扱いを実行する計算を行うには，ラグランジアンを自由な項と相互作用に分離するのではなく，実測される質量をもつ項と相互作用に分離する。そのため，規格化し直した場，結合定数や質量を導入してラグランジアンを書き直す。ラグランジアン

$$L=\overline{\psi}_0(x)(\gamma_\mu\cdot(p^\mu+e_0A_0^\mu)-m_0)\psi_0(x)-\frac{1}{4}F_{0\mu,\nu}F_0^{\mu,\nu}+\frac{1}{2\alpha_0}(\partial A_0)^2 \tag{6.232}$$

における裸の場や結合定数を，物理的な場や結合定数で

$$\psi(x)_0 = (1+K_2)^{1/2}\psi(x) = Z_2^{1/2}\psi(x) \tag{6.233}$$

$$A_0^\mu(x) = (1+K_3)^{1/2}A^\mu(x) = Z_3^{1/2}A^\mu(x) \tag{6.234}$$

$$e_0 = e\mu^{\frac{4-D}{2}}\frac{1+K_1}{(1+K_2)(1+K_3)^{1/2}} = e\mu^{\frac{4-D}{2}}\frac{Z_1}{Z_2Z_3^{1/2}} \tag{6.235}$$

$$m_0 = m\frac{1+K_m}{1+K_2} = m\frac{Z_m}{Z_2} \tag{6.236}$$

$$\alpha_0{}^{-1} = \frac{1+K_\alpha}{1+K_3} = \frac{Z_\alpha}{Z_3} \tag{6.237}$$

と規格化し直す。Z_i は規格化定数であり，式 (6.200) と (6.209) より K_i が次頁のように決まる。場 $\psi(x)$ と $A^\mu(x)$ は規格化された物理的な波を表している。すると，ラグランジアンが

$$\begin{aligned}
L &= Z_2\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\cdot p^\mu\psi(x) + imZ_m\overline{\psi}(x)\psi(x) \\
&\quad + eZ_1\overline{\psi}(x)\gamma_\mu A^\mu\psi(x) + \frac{Z_3}{4}F_{\mu,\nu}F^{\mu,\nu} + \frac{1}{2}Z_\alpha(\partial A)^2 \\
&= \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\cdot p^\mu\psi(x) + im\overline{\psi}(x)\psi(x) + e\overline{\psi}(x)\gamma_\mu A^\mu\psi(x) + \frac{1}{4}F_{\mu,\nu}F^{\mu,\nu} + \frac{1}{2}(\partial A)^2 \\
&\quad + (Z_2-1)\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\cdot p^\mu\psi(x) + im(Z_m-1)\overline{\psi}(x)\psi(x) \\
&\quad + e(Z_1-1)\overline{\psi}(x)\gamma_\mu A^\mu\psi(x) + \frac{Z_3-1}{4}F_{\mu,\nu}F^{\mu,\nu} + \frac{1}{2}(Z_\alpha-1)(\partial A)^2
\end{aligned} \tag{6.238}$$

と表される。この表式に基づき計算を行い，未定係数を一粒子状態の質量や電荷で決定する。その結果，無限大のない有限量だけですべてを決めることができる。これができるのが，繰り込み可能な理論である。量子電気力学は繰り込み可能な理論であり，φ^4 スカラー理論も繰り込み可能であり，また非可換ゲージ理論が繰り込み可能な理論である。今の場合，結合定数の 2 次のオーダーでは繰り込み定数が

$$Z_1 = Z_2 \tag{6.239}$$

$$Z_2 - 1 = K_2 = -\frac{e^2}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon} + F_2\right) \tag{6.240}$$

$$Z_3 - 1 = K_3 = -\frac{e^2}{12\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon} + F_3\right) \tag{6.241}$$

$$Z_m - 1 = K_m = -\frac{e^2}{4\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon} + F_m\right) \tag{6.242}$$

$$Z_\alpha - 1 = K_\alpha = \frac{e^2}{12\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon} + F_\alpha\right) \tag{6.243}$$

と決まる。$Z_2 = Z_3$ となるのは，Ward–高橋恒等式が成立するからである。繰り込まれた場 $(\psi(x), \overline{\psi}(x), A_\mu(x))$，繰り込まれた結合定数 e，繰り込まれた質量 m を使い散乱振幅が有限な値をとる。

6. 14 散乱振幅

ミクロの世界の物理量を求めるのに，散乱実験を使うことが多い。散乱がいかなる境界条件に対応するのかを明らかにし，対応した条件のもとでのグリーン関数，すなわち，散乱振幅を計算で求めることにする。

散乱では，まず入射波を用意する。入射波は，加速器によりつくられる粒子ビームのこともあり，またレーザーのような光のビームのこともある。多くの場合，個々の入射粒子は小さな波の塊，波束からできていると思われる。これは，入射粒子もまた，粒子と物質との間のある種の反応でつくられるからである。そのため，波束の大きさは，例外的な場合を除いて原子のサイズよりは大きくマクロなサイズよりは小さい，ミクロとマクロの中間の大きさである。ミクロなスケールをもつ物理では，波束の大きさは無限大であるとして無視してもよいことが多い。この場合，入射ビームは運動量の固有状態である平面波とみなして問題ない。

入射粒子が標的と衝突して，散乱波が生成される。標的は静止した物質であることが多いが，標的も加速器で加速されて入射する波のこともある。物質は 10^{-10} m 程度の大きさの原子からなり，原子は 10^{-15} m 以上の大きさをもつ原子核や電子からなっている。さらに原子核は 10^{-15} m 程度の陽子や中性子の核子からなっている。これらは，もちろん束縛状態をなしていて，平面波とみなせる状態からはほど遠い。束縛状態の空間的大きさが，波束の大きさに対応する。これらの大きさが有限であることを無視できない実験では，これを考慮することが必要である。

もう一つの問題は，散乱波を観測・測定する際の波はいかなるものであるか，である。測定器で観測する波はやはり波束である。では，この波束の大きさは何で決まるか? 測定器とみなせる最小単位の大きさを波束の大きさとみなすのがよいだろう。では，最小単位の測定器の大きさは何か? 原子一つか，原子数個分か，または原子数でアボガドロ数程度か? じつはこの問題は，単純な問題ではない。特に近年のミクロとマクロの中間のメソスコピック系や単一電子系等の自然現象や，量子情報や量子計算等の分野とも密接に関連する。量子

力学の観測問題一般とも関連する。ここでは，これらに立ち入らずに，とにかく測定の精度から決まる空間的大きさが波束の大きさであるとみなす。これは通常やはり，ミクロなサイズとマクロなサイズの中間である。

散乱の境界条件は時間についても明確に表す必要がある。この際，入射粒子と散乱粒子が波束からできていて，相互作用が短距離で働く場合に考察するとわかりやすい。時間が未来 (+) か過去 (−) で十分大きいとき，粒子が互いに十分離れる。そのため，互いの相互作用が無視でき，各粒子は自由な場で表される。このような境界条件を数学的に表すのは容易である。相互作用が $t=+\infty$ で 0 になるようにするには，$e^{it(H+i\epsilon)}$ とし，$t=-\infty$ で 0 になるようにするには，$e^{-it(H+i\epsilon)}$ と $i\epsilon$ をエネルギーにつければよい。これらは，電子や光子の伝播関数の分母にある $i\epsilon$ で表現できる。長距離相互作用の場合に生じる特異な事柄については後で考察する。以上を念頭において，具体的な計算を行おう。

6.14.1 異常磁気モーメントの計算

電子はスピンに比例する磁気モーメントをもつことが，式 (6.66) からわかる。角運動量との比例係数は，古典的な値の 2 倍であるので，

$$g=2 \tag{6.244}$$

であるが，さらに電子と光子との相互作用の効果が加わり補正を受ける。これは摂動論で計算され，e^2 や e^4 に比例する高次補正となる。ここでは，e^2 のオーダーの補正を求める。

電子と外部電磁場との相互作用を決めているのは，

$$L_{int}=eA_\mu^{\text{外場}}(x)j^\mu(x) \tag{6.245}$$

であるので，電子と外部電磁場との相互作用の高次補正は

$$\int dz\langle 0|T(\psi(x)\overline{\psi}(y)j^\mu(z)U(+\infty,-\infty))|0\rangle eA_\mu^{\text{外場}}(z) \tag{6.246}$$

から求まる。このため，前節で調べた電流を含むグリーン関数

$$\langle 0|T(\psi(x)\overline{\psi}(y)j^\mu(z)U(+\infty,-\infty))|0\rangle \tag{6.247}$$

の計算を行う。e^2 のオーダーでのダイアグラムとしては，図 6.7 である。ただし，電子の自己エネルギーや，光子の自己エネルギーの補正は電子の磁気モーメントに寄与しない。磁気モーメントは磁場との相互作用の強さを決める項であるので，vertex 項からだけ寄与がある。vertex 項の振幅 A_2 が式 (6.221) ですでに求められている。これから，

$$g=2+\frac{\alpha}{\pi} \tag{6.248}$$

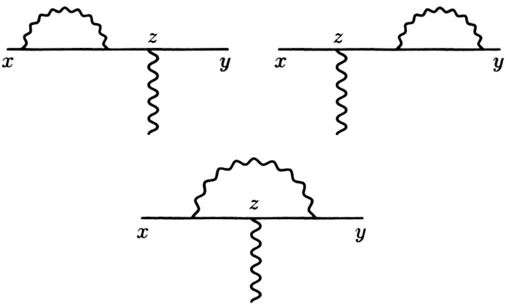


図 6.7 電流と電子

となることがわかる。

6.14.2 $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$

量子電気力学は電子と光子を含む物理系であるが，ミューオン (μ) も質量を除いて電子と同じ性質をもつ。電子とその反粒子である陽電子が一緒になると決まった確率で両方とも消滅してしまう。この場合でもエネルギーは保存するので，電子と陽電子がもつ初期状態のエネルギーと同じ大きさのエネルギーをもつ終状態が実現する。このような反応の例として電子と陽電子が消滅し，かわりにミューオンとその反粒子の対が生成する反応

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^- \tag{6.249}$$

を考察する。

ダイアグラムは図 6.8 であり，振幅は

$$f = \overline{v}^e(p_1)(-ie\gamma_\mu)u^e(p_2)iD^{\mu\nu}(p_1+p_2)\overline{v}^\mu(q_1)(-ie\gamma_\mu)u^\mu(q_2) \tag{6.250}$$

である。これより，初期状態のスピンについては平均をとり終状態のスピンについては和をとると，

$$\frac{1}{4}\sum_{spin}\overline{f}f = \frac{e^4}{4q^4}\mathrm{Tr}\left[(\gamma p_1 - m_e)\gamma^\mu(\gamma p_2 + m_e)\gamma^\nu\right]$$

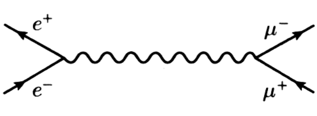


図 6.8 電子対消滅

$$\times \mathrm{Tr}\left[(\gamma q_1 - m_e)\gamma^\mu(\gamma q_2 + m_e)\gamma^\nu\right] \times \frac{1}{(2m_e)^2(2m_\mu)^2}$$
$$= \frac{8e^4}{q^4}\left[(p_1\cdot q_1)(p_2\cdot q_2) + (p_1\cdot q_2)(p_2\cdot q_1) + m_\mu^2(p_1\cdot p_2)\right]\frac{1}{(2m_e)^2(2m_\mu)^2} \tag{6.251}$$

となる。

初期状態では，スピンで平均し終状態ではスピンを足しあげた断面積は

$$\sigma = \int \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3}\frac{d^3q_2}{(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-q_1-q_2) \tag{6.252}$$
$$\times \frac{1}{|v_1+v_2|}\frac{m_e^2}{E(p_1)E(p_2)}\frac{m_\mu^2}{E(q_1)E(q_2)}\frac{1}{4}\overline{f}f \tag{6.253}$$

で与えられる。簡単のために重心系で計算する。重心系では，

$$\frac{1}{E(p_1)E(p_2)|v_1+v_2|} = \frac{1}{E_{\rm cm}E_{\rm cm}|\frac{p_{\rm cm}}{E_{\rm cm}}+\frac{p_{\rm cm}}{E_{\rm cm}}|}$$
$$= \frac{1}{2p_{\rm cm}E_{\rm cm}} \tag{6.254}$$

となる。結局，微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2E_{\rm cm}^2}\frac{k}{16\pi^2E_{\rm cm}}\frac{8e^4}{q^4}\left[(p_1\cdot q_1)(p_2\cdot q_2)+(p_1\cdot q_2)(p_2\cdot q_1)+m_\mu^2(p_1\cdot p_2)\right]$$
$$= \frac{\alpha^2}{4E_{\rm cm}^2}\left(1-\frac{m_\mu^2}{E_{\rm cm}^2}\right)^{1/2}\left[\left(1+\frac{m_\mu^2}{E_{\rm cm}^2}\right)+\left(1-\frac{m_\mu^2}{E_{\rm cm}^2}\right)\cos\theta^2\right] \tag{6.255}$$
$$\xrightarrow[E_{\rm cm}\gg m_\mu]{} \frac{\alpha^2}{4E_{\rm cm}^2}(1+\cos\theta^2) \tag{6.256}$$

で，全断面積は

$$\sigma_{\rm total} = \frac{\alpha^2}{4E_{\rm cm}^2}\left(1-\frac{m_\mu^2}{E_{\rm cm}^2}\right)^{1/2}\left[\left(1+\frac{1}{2}\frac{m_\mu^2}{E_{\rm cm}^2}\right)\right]$$
$$\xrightarrow[E_{\rm cm}\gg m_\mu]{} \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{\rm cm}^2} \tag{6.257}$$

で与えられる。

6.14.3 コンプトン散乱

電子と光子の散乱

$$e(p_1)+\gamma(k_1)\to e(p_2)+\gamma(k_2) \tag{6.258}$$

は，ダイアグラムで図 6.9 と表せる。振幅は

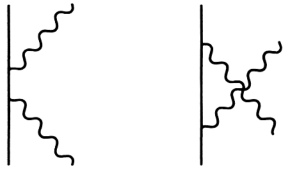


図 6.9 コンプトン散乱のダイアグラム

$$S^{\text{Compton}} = \frac{1}{V^2}\sqrt{\frac{m^2}{E_f E_i}}\frac{1}{\sqrt{2k_1 \cdot 2k_2}}(2\pi)^4\delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)iM \tag{6.259}$$

$$\begin{aligned} iM =& \overline{u}(p_2)(-ie\gamma_\mu)iS_F(P_2 + k_2)(-ie\gamma_\nu)u(p_1)\epsilon(k_2)^{\mu *}\epsilon(k_1)^\nu \\ &+ \overline{u}(p_2)(-ie\gamma_\nu)iS_F(P_2 - k_1)(-ie\gamma_\mu)u(p_1)\epsilon(k_2)^{\nu *}\epsilon(k_1)^\mu \end{aligned} \tag{6.260}$$

となる。

初期状態のスピンで平均し終状態のスピンで和をとった微分断面積は

$$d\sigma = \frac{e^4 m}{(2\pi)^2 2k_1 E_i |\boldsymbol{v}|} \times \int |M|^2 \times \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)\frac{md^3p_2}{E_2}\frac{d^3k_2}{2k_2} \tag{6.261}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m^2}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2\left[\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} + 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 - 2\right] \tag{6.262}$$

となる。

6.14.4 soft photon emittion

運動量が小さな光子を soft photon という。光子の質量が 0 であるため，光子のエネルギーは，

$$p_0 = cp \tag{6.263}$$

で与えられ，soft photon の光子は運動量に比例する小さなエネルギーをもつ。荷電粒子の状態とこの状態に soft photon が加わった状態は，ほぼ等しいエネルギーをもつ。そのため，荷電粒子が soft photon を放射する確率の計算は，荷電粒子のエネルギーが soft photon を放射する前後でほぼ同じ大きさになるので，縮退があるときの摂動計算に近くなる。エネルギー分母がほぼ 0 になることより高次補正が大きくなることがある。

外線の運動量 p ($p^2 = m^2$) をもつ荷電粒子の散乱振幅 $M(p)$ に対して，この外線から運動量 $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \cdots, \boldsymbol{k}_n$ をもつ n 個の soft photon が生成される振幅は

$$M(p)\sum_{\text{permutation}}\frac{1}{(p+k_i)^2-m^2}\frac{1}{(p+k_{i_1}+k_{i_2})^2-m^2}\cdots$$
$$\frac{1}{(p+k_{i_1}+k_{i_2}+\cdots+k_{i_n})^2-m^2}$$
$$=M(p)\sum_{\text{permutation}}\frac{1}{2p\cdot k_i}\frac{1}{2p\cdot(k_{i_1}+k_{i_2})}\cdots\frac{1}{2p\cdot(k_{i_1}+k_{i_2}+\cdots+k_{i_n})}$$
$$=M(p)\frac{1}{2(pk_1)2(pk_2)\cdots 2(pk_n)} \tag{6.264}$$

となる。ここで，分母は

$$p\cdot k=p_0k-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}=p_0k-pk\cos\theta \tag{6.265}$$
$$=\left(\sqrt{1+\left(\frac{m}{p}\right)^2}-\cos\theta\right)pk$$

である。k が 0 では，分母は 0 になり soft photon の生成確率が発散する。また高エネルギー $p\gg m$ かつ前方では k が有限でも分母が小さくなる。これらの領域では，photon の生成確率が極めて大きくなる。現実の反応と比較するためには，荷電粒子の入射波や散乱波に及ぼす soft photon の影響を解析する必要がある。

6.14.5 V–V–A 三角形ダイアグラム

軸性ベクトルカレント $j_5^\mu(x)$ は

$$j_5^\mu(x)=\overline{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x) \tag{6.266}$$

で与えられ，カレントの発散が

$$\partial_\mu j_5^\mu(x)=i2mj_5(x) \tag{6.267}$$
$$j_5(x)=\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$$

と質量に比例することが運動方程式から導かれる。電子が質量をもたないときは右辺が 0 になり，軸性カレントは保存する。質量が 0 であるときはラグランジアンは α を任意なパラメーターとする連続変換，

$$\psi\to e^{i\alpha\gamma_5}\psi \tag{6.268}$$
$$\overline{\psi}\to\overline{\psi}e^{i\alpha\gamma_5} \tag{6.269}$$

に対して不変である。この連続変換に対するネーター電流が j_5^μ である。

摂動論の高次効果で軸性カレントは質量が 0 である場合でも保存しなくなる。



(a) 軸性カレントの期待値 (b) $\langle T(j^5_\mu j^5_\nu)\rangle$

図 6.10

Adler の論文[1)]に沿って軸性カレントを含むグリーン関数を考察してこれを調べよう。1 個の軸性カレントの期待値 (図 6.10 (a)) は 0,

$$\langle j^5_\mu(x)\rangle = 0 \tag{6.270}$$

になり，2 個の軸性カレントの期待値 (図 6.10 (b)) は 2 個のベクトルカレントの期待値にほぼ等しい。

$$\langle j^5_\mu(x) j^5_\nu(y)\rangle \approx \langle j_\mu(x) j_\nu(y)\rangle. \tag{6.271}$$

しかし，2 個のベクトルカレントと 1 個の軸性カレントで定義されるグリーン関数，

$$\langle 0|T(j^\mu(x) j^\nu(y) j_5^\rho(z))|0\rangle \tag{6.272}$$

は特異な性質をもつ (図 6.11)。これを摂動論に基ずいてここで詳しく考察しよう。

摂動展開の最低次のオーダーで振幅は，

$$\mathrm{Tr}\left[(-i)\gamma^\mu i S_F^0(x-y)\gamma_5\gamma^\nu i S_F^0(y-z)\gamma^\rho i S_F^0(z-x)\right] \tag{6.273}$$

となる。さらに計算を進めるため，フーリエ変換して運動量を使う表示で，

$$\begin{aligned}&\int dxdydz\, e^{i(k_1x+k_2y-qz)}\langle 0|T(j^\mu(x) j^\nu(y) j_5^\rho(z))|0\rangle \\ &= \int dp\, \mathrm{Tr}\left[(-i)\gamma^\mu i S_F^0(p)\gamma_5\gamma^\nu i S_F^0(p+p_2)(-i)\gamma^\rho i S_F^0(p+p_2+q)\right]\end{aligned} \tag{6.274}$$

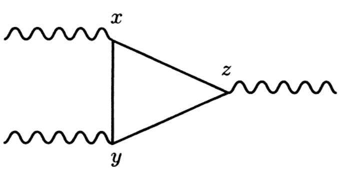


図 6.11 三角形ダイアグラム

1) S. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426(1969); J. S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cimento **60A**, 47(1969).

と表そう。ここで，q は軸性ベクトル電流が運ぶ運動量，k_1 と k_2 はベクトル電流が運ぶ運動量である。

ここでベクトル電流は質量の値に関係なく保存する電流である。propagator を代入して振幅が，

$$
\begin{aligned}
&\frac{-ie_0{}^2}{(2\pi)^4}R_{\sigma\rho\mu}\\
&\quad= 2\int\frac{d^4r}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{Tr}\left[\frac{i}{r\gamma+k\gamma-m_0}(-ie_0\gamma_\sigma)\frac{i}{r\gamma-m_0}\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times(-ie_0\gamma_\rho)\frac{i}{r\gamma-k_2\gamma-m_0}\gamma_\mu\gamma_5\right]\\
&\quad= 2(-i)(e_0)^2\int\frac{d^4r}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{r\gamma+k\gamma-m_0}\gamma_\sigma\frac{1}{r\gamma-m_0}\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times\gamma_\rho\frac{1}{r\gamma-k_2\gamma-m_0}\gamma_\mu\gamma_5\right]\\
&\quad= 2(-i)(e_0)^2\int\frac{d^4r}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{Tr}\left[\frac{r\gamma+k\gamma+m_0}{(r+k_1)^2-m_0^2}\gamma_\sigma\frac{r\gamma+m_0}{r^2-m_0^2}\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times\gamma_\rho\frac{r\gamma-k_2\gamma+m_0}{(r-k_2)^2-m_0^2}\gamma_\mu\gamma_5\right]\\
&\quad= 2(-i)(e_0)^2\int\frac{d^4r}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{Tr}\Big[(r\gamma+k\gamma+m_0)\gamma_\sigma(r\gamma+m_0)\\
&\qquad\qquad\times\gamma_\rho(r\gamma-k_2\gamma+m_0)\gamma_\mu\gamma_5\Big]\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\\
&\quad\times\left(\frac{1}{x(r+k_1)^2-xm_0^2+(1-x-y)r^2-(1-x-y)m_0^2+y(r-k_2)^2-ym_0^2}\right)^3
\end{aligned}
\tag{6.275}
$$

と求まる。ここでベクトル電流が運ぶ運動量 k_1 と k_2 に着目して振幅 $R_{\sigma\rho\mu}$ を不変振幅 A_i $(i=1\sim6)$ で，

$$
\begin{aligned}
R_{\sigma\rho\mu} =& A_1k_1{}^\tau\epsilon_{\tau\sigma\rho\mu}+A_2k_2{}^\tau\epsilon_{\tau\sigma\rho\mu}+A_3k_{1\rho}k_1{}^\xi k_2{}^\tau\epsilon_{\xi\tau\sigma\mu}\\
&+A_4k_{2\rho}k_1{}^\xi k_2{}^\tau\epsilon_{\xi\tau\sigma\mu}+A_5k_{1\sigma}k_1{}^\xi k_2{}^\tau\epsilon_{\xi\tau\rho\mu}+A_6k_{2\sigma}k_1{}^\xi k_2{}^\tau\epsilon_{\xi\tau\rho\mu}
\end{aligned}
\tag{6.276}
$$

と表しておくと便利である。分母は，

$$
\begin{aligned}
&x(r+k_1)^2-xm_0^2+(1-x-y)r^2-(1-x-y)m_0^2+y(r-k_2)^2-ym_0^2\\
&\quad= r^2+2r(xk_1-yk_2)+xk_1{}^2+yk_2{}^2-m_0^2\\
&\quad= (r+xk_1-yk_2)^2+x(1-x)k_1{}^2+y(1-y)k_2{}^2+2xyk_1k_2
\end{aligned}
\tag{6.277}
$$

と積分変数について平方完成して後，変数を

$$l = r + xk_1 - yk_2 \tag{6.278}$$

と変換する。明らかに振幅における4次元積分は発散する。発散の度合いは最大で cut off Λ について比例して発散する。しかし，外線の運動量を取り出して残る積分については，発散の次数は下がる。このため，振幅 A_j $(j = 3 \sim 6)$ は外線の運動量 k_i を3個取り出しているので，積分に関する運動量 l_μ が大きいところで速く収束するため，積分が明らかに収束する。これらは繰り込みや regularization に関係ない項である。そのため，電子の異常磁気モーメントと同じで，計算結果が予言能力をもつ物理量である。運動量 l_μ で積分して，

$$A_3(k_1, k_2) = -A_6(k_2, k_1) = -16\pi^2 I_{11}(k_1, k_2) \tag{6.279}$$

$$A_4(k_1, k_2) = -A_5(k_2, k_1) = -16\pi^2 [I_{20}(k_1, k_2) - I_{10}(k_1, k_2)] \tag{6.280}$$

$$I_{st} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, x^s y^t [y(1-y)k_1^2 + x(1-x)k_2^2 + 2xyk_1 \dot{k}_2 - m_0^2]^{-1} \tag{6.281}$$

と有限な値が得られる。しかし A_1 と A_2 は発散する可能性がある物理量であり，質量や電荷と同じで繰り込みや regularization に関係する物理量であり，予言能力をもたない。しかしベクトル電流は保存するので，保存則より，恒等式

$$\begin{aligned} {k_1}^\sigma R_{\sigma\rho\mu} &= 0 \\ {k_2}^\rho R_{\sigma\rho\mu} &= 0 \end{aligned} \tag{6.282}$$

が満たされるはずである。不変振幅による $R_{\sigma\rho\mu}$ の展開式を代入すると，不変振幅の間の関係式

$$A_2 = {k_1}^2 A_5 + k_1 \cdot k_2 A_6 \tag{6.283}$$

$$A_1 = {k_2}^2 A_4 + k_1 \cdot k_2 A_3 \tag{6.284}$$

が得られる。だから，積分が有限である振幅 A_j $(j = 3, 6)$ を使い A_1 と A_2 が表される。ゲージ不変性を満たす適当な方法で regularization を行えば，自動的にこの結果が導かれる。

さらにこの関係式を使い軸性ベクトルについての保存則を調べる計算を進めよう。

$$\begin{aligned}
({k_1}^\mu + {k_2}^\mu) R_{\sigma\rho\mu} &= A_1 {k_1}^\mu {k_1}^\tau \epsilon_{\tau\sigma\rho\mu} + A_2 {k_1}^\mu {k_2}^\tau \epsilon_{\tau\sigma\rho\mu} + A_3 {k_1}^\mu k_{1\rho} {k_1}^\xi {k_2}^\tau \epsilon_{\xi\tau\sigma\mu} \\
&\quad + A_4 {k_1}^\mu k_{2\rho} {k_1}^\xi {k_2}^\tau \epsilon_{\xi\tau\sigma\mu} + A_5 {k_1}^\mu k_{1\sigma} {k_1}^\xi {k_2}^\tau \epsilon_{\xi\tau\rho\mu} + A_6 {k_1}^\mu k_{2\sigma} {k_1}^\xi {k_2}^\tau \epsilon_{\xi\tau\rho\mu} \\
&\quad + A_1 {k_2}^\mu {k_1}^\tau \epsilon_{\tau\sigma\rho\mu} + A_2 {k_2}^\mu {k_2}^\tau \epsilon_{\tau\sigma\rho\mu} + A_3 {k_2}^\mu k_{1\rho} {k_1}^\xi {k_2}^\tau \epsilon_{\xi\tau\sigma\mu} \\
&\quad + A_4 {k_2}^\mu k_{2\rho} {k_1}^\xi {k_2}^\tau \epsilon_{\xi\tau\sigma\mu} + A_5 {k_2}^\mu k_{1\sigma} {k_1}^\xi {k_2}^\tau \epsilon_{\xi\tau\rho\mu} + A_6 {k_2}^\mu k_{2\sigma} {k_1}^\xi {k_2}^\tau \epsilon_{\xi\tau\rho\mu} \\
&= A_2 {k_1}^\mu {k_2}^\tau \epsilon_{\tau\sigma\rho\mu} + A_1 {k_2}^\mu {k_1}^\tau \epsilon_{\tau\sigma\rho\mu} \\
&= (A_1 - A_2) {k_2}^\mu {k_1}^\tau \epsilon_{\tau\sigma\rho\mu}
\end{aligned} \tag{6.285}$$

となる。式 (6.284) と I_{st} による表示を使いさらに

$$\begin{aligned}
&(A_1 - A_2)\\
&= ({k_2}^2 A_4 + k_1 \cdot k_2 A_3 - {k_1}^2 A_5 - k_1 \cdot k_2 A_6)\\
&= 16\pi^2({k_2}^2(I_{20} - I_{10}) + k_1 \cdot k_2(-)(I_{11}) - {k_1}^2(-I_{02} + I_{01}) - k_1 \cdot k_2 I_{11})\\
&= 16\pi^2({k_2}^2(I_{20} - I_{10}) + k_1 \cdot k_2(-)(I_{11}) - {k_1}^2(-I_{02} + I_{01}) - k_1 \cdot k_2 I_{11})
\end{aligned} \tag{6.286}$$

となる。一見複雑なファインマンパラメーター積分が質量 m_0 が 0 になる極限で簡単に

$$\begin{aligned}
&{k_2}^2(I_{20} - I_{10}) + k_1 \cdot k_2(-)(I_{11}) - {k_1}^2(-I_{02} + I_{01}) - k_1 \cdot k_2 I_{11}\\
&\quad = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = -\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{6.287}$$

となる。よって，質量 m_0 が 0 になる極限で，軸性カレントの発散が

$$({k_1}^\mu + {k_2}^\mu) R_{\sigma\rho\mu} = -8\pi^2 {k_2}^\mu {k_1}^\tau \epsilon_{\tau\sigma\rho\mu} \tag{6.288}$$

と有限な値で求まる。この結果から，軸性カレントは質量が 0 であるときでも保存則を満たさずに，右辺のようになる。保存則の破れの起源についての詳しい考察を次の節で行う。

6.14.6 有限温度での熱力学量

温度 T の熱平衡状態にある系の分配関数，

$$Z = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}) \tag{6.289}$$

を経路積分で計算しよう。有限温度における計算は，時間を虚数とした四次元時空における場の理論で行え，散乱振幅とほぼ同じに行える。注意しなければならないのは，散乱振幅の計算では所々に純虚数 i がついたが，今の計算では i がつかないことである。

温度が T であるとき，場は境界条件，

$$A_\mu(\boldsymbol{x}, x_4 + \beta) = A_\mu(\boldsymbol{x}, x_4) \tag{6.290}$$

$$\psi(\boldsymbol{x}, x_4 + \beta) = -\psi(\boldsymbol{x}, x_4) \tag{6.291}$$

を満たす。ゲージ場の経路積分はゲージ固定項を加えたラグランジアンで定義される。

$$Z = \int \prod D\psi(x) D\overline{\psi}(x) DA_\mu(x) \exp\left(-\int_0^\beta dx_4 \int d^3x (L_0 + L_i)\right) \tag{6.292}$$

$$L_0 = \overline{\psi}(x)(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi(x) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu(x))^2$$

$$L_i = -eA_\mu(x)j_\mu(x)$$
$$j_\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$$

経路積分の計算は第3章のスカラー場の理論の計算と同様に，ラグランジアンを場の二次形式の部分 L_0 と高次項 L_i に分離して行う。この際，場 $\psi, \overline{\psi}, A_\mu$ に共役な源項 $\overline{\eta}, \eta, \eta_\mu$ を導入して，

$$\overline{\psi}(x)\eta(x) + \overline{\eta}(x)\psi(x) + \eta_\mu(x)A_\mu(x) \tag{6.293}$$

をラグランジアンに加えて分配関数を表すと都合がよい。分配関数が

$$\begin{aligned} Z =& Z_0 \exp\left(-e\int dz \frac{\partial}{\partial\eta(z)}\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial\overline{\eta}(z)}\frac{\partial}{\partial\eta_\mu(z)}\right) \\ &\times \exp\left(-\int dxdy(\overline{\eta}(x)S^{(0)}(x-y)\eta(y) + \eta_\mu(x)D^{(0)}_{\mu\nu}(x-y)\eta_\nu(y))\right) \end{aligned} \tag{6.294}$$

と表せる。ここで，源項は微分の後で，最後に0とおく。また自由場の伝播関数は，

$$S^{(0)}(x-y) = \sum_{p_4^n}\int d\boldsymbol{p}\exp(ip(x-y))\frac{\gamma p + m}{p^2 + m^2} \tag{6.295}$$

$$D^{(0)}_{\mu\nu}(x-y) = \sum_{p_4^n}\int d\boldsymbol{p}\exp(ip(x-y))\frac{1}{p^2}\left(g_{\mu\nu} + (1-\alpha)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) \tag{6.296}$$

である。ここで，運動量の第4成分は境界条件から，

$$p_4^n = \frac{2\pi}{\beta}n, \quad \text{ボソン} \tag{6.297}$$

$$p_4^n = \frac{2\pi}{\beta}(n+1/2), \quad \text{フェルミオン} \tag{6.298}$$

となる。分配関数や電子と光子の伝播関数は相互作用の効果で補正を受ける。

6.15 軸性アノマリー

対称性が量子効果で破れるのが軸性アノマリーの特徴である。通常の場合は量子化は古典理論がもつ対称性と矛盾なく行われる。しかし，電子の質量が0である古典論で成立する軸性電流に対する保存則は，量子電気力学において，量子効果を含めて計算すると，

$$\partial_\mu j_5^\mu(x) = \frac{e^2}{48\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}(x)F^{\rho\sigma}(x) \tag{6.299}$$

と電流の発散が電磁場の積に比例し電流は保存しなくなる。対称性は現代物理学で重要な役割を占める。特にゲージ理論は対称性に基づいて定式化されてい

るので対称性の破れはゲージ理論の根幹にかかわる重要な事柄である。摂動論の計算で得られた対称性の量子的な破れの起源を，摂動論を越えて理解することが本節の目的である。

一見異常に見える現象の背後にあるのは，外場によるディラック真空の不安定性 (**フェルミ面の不安定性**) である。Nielsen と二宮の論法[2)]で式 (6.299) の右辺が有限な値をとる外場中のディラック真空を調べよう。

6.15.1　空間 1 次元モデル

簡単なモデルとして，時空 $1+1$ 次元のワイル・フェルミオン理論を考察する。波動方程式は，

$$i(\partial^0 + \partial^1)\psi(x) = 0 \tag{6.300}$$

であり，解は

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \exp i(p^0 x^0 - p^1 x^1) \\ p^0 &= p^1 \end{aligned} \tag{6.301}$$

となる。よって，エネルギーは

$$\begin{aligned} p^0 > 0, &\quad p^1 > 0 \\ p^0 \leq 0, &\quad p^1 \leq 0 \end{aligned} \tag{6.302}$$

となる。負のエネルギー状態がすべて埋まった状態が真空である。だから，場を

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_p a_p \exp(ipx) \\ \psi^\dagger(x) &= \sum_p a_p^\dagger \exp(-ipx) \end{aligned} \tag{6.303}$$

と展開すると，

$$H = \sum_p p a_p^\dagger a_p \tag{6.304}$$

となり，負エネルギー一粒子状態がつまった多体としての真空状態は，

$$|0\rangle_{\text{Diracsea}} = \Pi_{p_1 \leq 0} a_p^\dagger |0\rangle \tag{6.305}$$

である。反粒子の生成演算子と消滅演算子を負エネルギーモードの粒子の消滅演算子と生成演算子から

$$b_p^\dagger = a_p, \qquad b_p = a_p^\dagger \tag{6.306}$$

と定義しておくと便利である。

---

2) H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Phys. Letter **130B**, 389(1983).

次に一様な電場がかかった系を調べる。方程式

$$i(\partial^0 - ieA_0(x) + \partial^1 - ieA_1(x))\psi(x) = 0 \tag{6.307}$$

のゲージ場を

$$A_0 = 0 \tag{6.308}$$

$$A_1 = x_0 E \tag{6.309}$$

として，方程式

$$i(\partial^0 + \partial^1 + ieEx_0)\psi(x) = 0 \tag{6.310}$$

を解く。解は空間方向の平面波

$$\psi(x_1, x_0) = \exp\left(-i\left(px_0 + \frac{1}{2}eEx_0^2 - px\right)\right) \tag{6.311}$$

である。ポテンシャルが時間依存性をもつため，エネルギーは一定ではなく時間に依存して，

$$i\partial^0\psi(x_1, x_0) = (p + eEx_0)\psi(x_1, x_0) \tag{6.312}$$

より，

$$p + eEx_0 \tag{6.313}$$

である。この結果から，$x_0 = 0$ では $p < 0$ の状態が負エネルギーをもつが，$x_0 > 0$ では，

$$p < -eEx_0 \tag{6.314}$$

なる状態が負エネルギーをもつ。物理系の長さが L であるとして

$$p = \frac{2\pi}{L}n \tag{6.315}$$

を使い，単位時間あたりに正エネルギーから負エネルギーに変わる状態数の変化率は

$$\dot{N} = -eE\frac{L}{2\pi} \tag{6.316}$$

である。単位長さあたりに換算した変化率は，

$$\frac{\dot{N}}{L} = -eE\frac{1}{2\pi} \tag{6.317}$$

となる。電流

$$j^0 = e\psi^\dagger\psi \tag{6.318}$$

$$j^1 = e\psi^\dagger\psi \tag{6.319}$$

は運動方程式を使う限り，保存則を満たし

$$\dot{j}^0 + \partial_1 j^1 = 0 \tag{6.320}$$

となるため，全粒子数

$$N = \int dx j^0 \tag{6.321}$$

$$\dot{N} = 0 \tag{6.322}$$

は一定となるはずである。しかし，一粒子状態のエネルギーに基づいて計算した上の結果は一定にはならず電流保存則とは矛盾するものである。負エネルギーが埋まった基底状態で，一粒子エネルギーが時刻とともに変化することにより，各時刻における基底状態の粒子数が変化した結果電荷の非保存が生じ，電流の保存則が破れ

$$\partial_\mu j^\mu(x) = -e\frac{1}{2\pi}F^{01} \tag{6.323}$$

となっていることを示している。

6.15.2 空間 3 次元モデル

3+1 次元における場の理論でも同様な保存則の破れが引き起こされる。外場として，$\boldsymbol{E} = (0, 0, E)$, $\boldsymbol{B} = (0, 0, H)$ である場合を考察しよう。

カイラルゲージ理論

まず，カイラルゲージ理論

$$\begin{aligned} L &= \overline{\psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu)\frac{1+\gamma_5}{2}\psi \\ &= \psi_R^\dagger\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0\right) - (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{\sigma}\right]\psi_R \end{aligned} \tag{6.324}$$

$$\psi_R = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi \tag{6.325}$$

を考察する。上の理論は場の位相変換

$$\psi_R(x) \to e^{i\alpha}\psi(x)_R \tag{6.326}$$

$$\psi(x)_R^\dagger \to \psi(x)_R^\dagger e^{-i\alpha} \tag{6.327}$$

に対して不変である。そのため，保存電流

$$j^0 = \psi_R^\dagger\psi \tag{6.328}$$

$$\boldsymbol{j} = \psi_R^\dagger\boldsymbol{\sigma}\psi \tag{6.329}$$

が存在する。

ここで，まず一様磁場が 3 軸方向にかかるときの基底状態を明らかにしよう。ベクトルポテンシャルが

$$A^2 = Hx^1 \tag{6.330}$$

$$A_\mu = 0, \quad \mu \neq 2 \tag{6.331}$$

であるときの一体エネルギー固有値は，固有値方程式

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \psi_R = 0 \tag{6.332}$$

で解を

$$\psi_R = \left[i\frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \Psi \tag{6.333}$$

とおいて求まる。方程式は

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - ((\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 \right] \Psi = 0 \tag{6.334}$$

となり，右辺の微分演算子の 2 乗は

$$((\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + e^2H^2 \left(x^1 + \frac{p_2}{eH} \right)^2 + p_3^2 + eH\sigma_3 \tag{6.335}$$

と書き換えられる。よって，エネルギー固有値が

$$\begin{gathered} \omega(n, \sigma_3, p_3) = \pm \left[2eH \left(n + \frac{1}{2} \right) + p_3^2 + eH\sigma_3 \right]^{1/2} \\ \omega(n = 0, \sigma_3 = -1, p_3) = \pm p_3 \end{gathered} \tag{6.336}$$

となることがわかる。

対応する固有関数は

$$\Psi_{n\sigma_3}(x) = N_n\sigma_3 \exp(-ip_2x^2 - ip_3x^3) \tag{6.337}$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}eH \left(x^1 + \frac{p_2}{eH} \right)^2 \right) H_n \left(x^1 + \frac{p_2}{eH} \right) \xi(\sigma_3) \tag{6.338}$$

である。固有値 $\omega(n = 0, \sigma_3 = -1, p_3)$ は前に解析された空間 1 次元の解と同じ性質，すなわちエネルギーが 0 を切る解である。

磁場に加えて，3 軸方向に電場 E がある場合，負エネルギー状態の数が時間とともに変化する。縮退度を考慮すると，0 を切る状態数の変化率が

$$\begin{aligned} \dot{N}_R &= L^{-1} \left(\frac{LeH}{4\pi^2} \right) \omega_{fs}(n = 0, \sigma_3 = -1, p_3) \\ &= \frac{e^2}{4\pi^2} EH \end{aligned} \tag{6.339}$$

となる。電場と磁場の内積は，

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} = 4\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H} \tag{6.340}$$

から (6.299) 式の右辺になっている。

ベクトル的なゲージ理論

ベクトル的なゲージ理論では，ラグランジアンを

$$
\begin{aligned}
L &= \overline{\psi}\gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} + eA_{\mu})\psi \\
&= \psi_R^{\dagger}\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0\right) - (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{\sigma}\right]\psi_R \\
&\quad + \psi_L^{\dagger}\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0\right) + (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{\sigma}\right]\psi_L
\end{aligned} \tag{6.341}
$$

$$\psi = \psi_R + \psi_L \tag{6.342}$$

$$\psi_R = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi, \quad \psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi \tag{6.343}$$

と二つのカイラルモードに分解できる。ただし

$$\alpha_i\psi_R = \sigma_i\psi_R \tag{6.344}$$

$$\alpha_i\psi_L = -\sigma_i\psi_L \tag{6.345}$$

を使った。各カイラルモードに上の計算を使うことにより，粒子数の変化率が

$$\dot{N}_R = \frac{e^2}{4\pi^2}EH \tag{6.346}$$

$$\dot{N}_L = -\frac{e^2}{4\pi^2}EH \tag{6.347}$$

と求まる。一方で，ベクトル電荷は両者の和であり軸性ベクトル電荷は両者の差であることから，

$$\dot{N} = (\dot{N}_R + \dot{N}_L) = 0 \tag{6.348}$$

$$\dot{N}_5 = (\dot{N}_R - \dot{N}_L) = 2\frac{e^2}{4\pi^2}EH \tag{6.349}$$

となり，ベクトル電流は保存し軸性電流は保存しない。この結果は，摂動論の計算 (6.288) や (6.299) に一致する。このように，V–V–A ダイアグラムの摂動

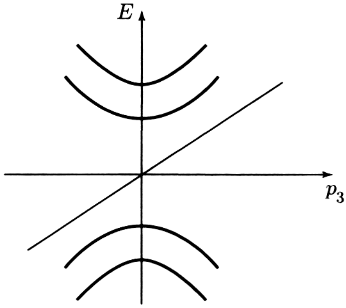


図 6. 12 エネルギースペクトル

計算で求まった軸性アノマリーは負エネルギーが埋まった基底状態で，外場のために一粒子エネルギーが時刻とともに変化することにより，各時刻における基底状態の粒子数が変化した結果である。このように生じた基底状態の電荷の非保存により，電流の保存則が破れている。そのため軸性アノマリーはディラック真空の不安定性または，フェルミ面の不安定性に起源があるとみなせる。

6.15.3 軸性アノマリーの効果

では，外場がない状況における電子系では，軸性アノマリーは無視できるのだろうか？ V–V–A ダイアグラムの摂動計算で求まった軸性アノマリーは，一様な外場がなくても導かれる。だから，軸性ベクトル電流 $j_\mu^5(x)$ が系の自由度と結合するときは，やはり軸性アノマリーは無視できないで，重要な寄与を与える。以下の二つの場合で物理的に異なる効果を与える。

1. $j_\mu^5(x)$ がゲージ場と結合している。
2. $j_\mu^5(x)$ はゲージ場と別の系の自由度と結合している。

1. は，非可換ゲージ理論で定式化される素粒子標準理論で重要な効果を与える。クォークとレプトンのそれぞれに起因する軸性アノマリーが，互いに打ち消して矛盾のないゲージ理論が構成されている。2. は，中性パイ中間子の2光子崩壊で実際の観測にかかり，また，次の章で扱われる量子ホール効果が密接に関連している。

問 題 6

6.1 磁場中の電子の2状態が，軌道角運動量の差 δl_z をもつとき対応するエネルギー差 $\delta E = e\frac{B}{2m}\delta l_z$ はいかなる高次補正をもつか?

6.2 磁場中の電子の2状態が，スピン角運動量の差 δs_z をもつとき，対応するエネルギー差 $\delta E = e\frac{B}{2m}\delta s_z$ はいかなる高次補正をもつか?

6.3 電子の異常磁気モーメントを e^2 のオーダーで求めよ。

6.4 コンプトン 散乱振幅を e^2 のオーダーで求め，微分断面積の式 (6.262) が正しいことを確認せよ。

6.5 摂動論の計算で，軸性カレントの保存則を破るのは (V–V–A) 三角形ダイアグラムだけである。これを示せ。

6.6 前問の結果から軸性カレントの異常な保存則は高次補正をもたないことを示せ。

6.7 時空2次元の零質量 QED (Schwinger 模型)

$$L = \overline{\psi}(x)\gamma(p + eA)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \tag{6.350}$$

では，軸性カレント j_μ^5 とベクトルカレント j_μ が

$$j_\mu^5 = \epsilon_{\mu\nu} j^\nu \tag{6.351}$$

で関係していることを示せ。ただし，

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}\sigma_1,\ \gamma_1 = \frac{1}{2}\sigma_2,\ \gamma_5 = \frac{1}{2}\sigma_3 \tag{6.352}$$

を使え。次に，この関係式と軸性カレントのアノマリーの関係式を使い A_μ が質量をもつことを示せ。

6.8 真空分極 $\Pi_{\mu\nu}(p) = (g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2})\Pi(p)$ における $\Pi(0) \neq 0$ ならば，結合している A_μ が質量をもつことを示せ。複素スカラー場において，$U(1)$ 対称性が破れたとき，これが実現することを確認せよ。

7章　量子ホール場の理論

量子ホール系では，物質である電子の多体系で，極めて特異で普遍的な物理が発現している。量子ホール系は，近年における最も面白い物理系であろう。

7.1　量子ホール系

近年ハイテク技術が高度に進展して極めて純粋な二次元電子系が作成されるようになってきた。この電子系に強い磁場をかけた物理系が量子ホール系である。強磁場中の二次元電子系では，一体エネルギーがとびとびの値をとるとともに時間反転対称性が破れる等いくつかの点で特異な性質をもつ。これらを反映して，量子ホール系で多くの新現象が低温で発現している。その中には従来の常識を越える新現象が多くある。これら多くの現象の発現機構の解明は場の量子力学の格好の研究テーマである。新たな現象が発現することは，新奇な多電子状態が形成されたことを意味するものである。多電子状態に関するミクロな世界の事柄は，場の理論を適用して解明する問題である。

量子ホール系は半導体中の界面で実現する電子系である。真空中ではないので，相対論的不変性はない。たくさんの電子がエネルギーとして meV (10^{-3}eV) のオーダーの小さな値をもつ。この値は，電子の質量 0.5 MeV (10^6eV) よりはるかに小さい非相対論的なエネルギー領域に属する。また，金属や半導体等の物質中では，自由に動ける電子は結晶の周期ポテンシャルの影響のためバンド構造をなす。その一体エネルギーは運動量の複雑な関数になることもあるが，各バンドの極小値の近傍では良い近似で二次関数で表せる。この領域では，運

動量 $\boldsymbol{p}$ で運動エネルギーの値は

$$\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{7.1}$$

とおける。ここで m は有効質量であり真空中の真の質量とは異なる値をとる。量子ホール効果が実現する代表的な半導体である GaAs-GaAlAs ヘテロ構造では，

$$m = 0.07m_{\text{真空}} \tag{7.2}$$

である。このようなエネルギーをもつ電子系の多体問題は，相対論的に不変な物理系とは全く異なる。しかし，磁場中で多電子系は，相対論的電子系と同じ特異な性質と振る舞いをすることがわかる。QED の「 軸性アノマリー」が量子ホール効果でも重要な働きをしている。量子ホール系は，物質中における現象であり真空中とは異なるため，様々な物質の効果や不純物の効果等が無視できないことも多い。それにもかかわらず，普遍的な値が観測されるのが一つの特徴である。

量子ホール効果は, 電子が 2 次元平面内を自由に動く二次元電子系で発現する。自然界で空間は 3 次元であるため，二次元電子系を実現するには特殊な物質や装置が必要である。近年のテクノロジーの発展でこれが可能になった。半導体の界面やヘリウムの界面がよく使われる二次元電子系である。半導体は電子機器での主要な部品であり，その性能が機器全体の性能を決定する最も重要なものである。半導体の高性能化は産業にとって重要であるが，また基礎科学にとっても重要である。 その典型的な物理現象が量子ホール効果である。 本書では二次元電子系をどのようにつくるかは問わないことにして，その物理を調べる。量子ホール系の物理は場のラグランジアンやハミルトニアンの力学で決定され，一つのラグランジアンやハミルトニアンから多くの相が実現する。電子占有率の変化とともに相異なる相が形成されることは，図 7.1 の電気伝導度の振る舞いからも予想できる。電気伝導度が示す多くの構造は，多電子系の性質を反映している。特に伝導度 σ_{xx} が 0 になり σ_{xy} が平らになる領域ではエネルギーギャップをもつ多電子系の基底状態が形成されている。

量子ホール系はまた，量子アノマリー，トポロジー的不変量，位相の自由度等の場の理論の様々な特異な非摂動効果を発現させ，これらの観測を可能にさせる物理系である。

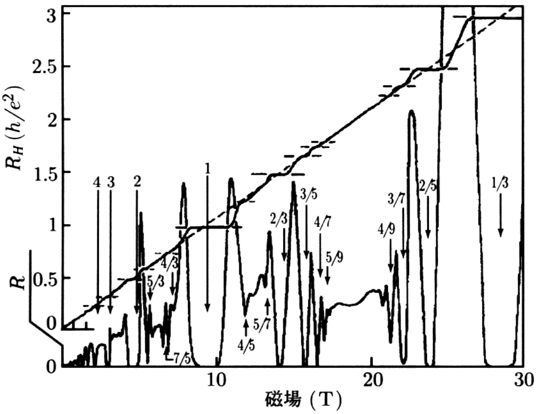


図 7.1 ホール抵抗 $R_{\rm H}$ とたて抵抗[1)]

7.2 量子ホール場の理論のラグランジアンと一体問題

5章で求めたように電磁場と結合した空間2次元における非相対論的電子系はラグランジアン

$$L = \int d^3x \left[\psi^\dagger(x) i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x) - \psi^\dagger(x)\frac{(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})^2}{2m}\psi(x) + L_{\rm int} \right] \tag{7.3}$$

で記述される。$L_{\rm int}$ は電子間相互作用や電子と他の場との相互作用，ならびに他の場を含むものとする。ハミルトニアンは

$$H = H_0 + H_{\rm int} \tag{7.4}$$

$$H_0 = \int d^3x\, \psi^\dagger(x)\frac{(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})^2}{2m}\psi(x) \tag{7.5}$$

$$H_{\rm int} = -\int d^3x L_{\rm int} \tag{7.6}$$

であり，面に垂直で大きさが B である一様磁場は，ベクトルポテンシャル

$$(A_x(x), A_y(x)) = \frac{B}{2}(y, -x) \tag{7.7}$$

で表される。またこれを一つの関数 $\lambda(x)$ でゲージ変換した，

$$(A_x(x), A_y(x)) \to (A_x(x), A_y(x)) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\lambda(x), \frac{\partial}{\partial y}\lambda(x)\right) \tag{7.8}$$

ももちろん同じ磁場を表す。強磁場中の電子の特徴はこの運動項のラグランジアンから導かれる。そこでまず，運動項の性質を調べる。

---

1) H. L. Stormer, Physica **B177**, 401-408 (1992).

7.2.1 一体問題

まず一体問題を調べる。磁場のため一体エネルギーは磁場がない場合とは大きく異なる振る舞いをする。これは固有値方程式

$$\frac{(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})^2}{2m}u = Eu \tag{7.9}$$

の解からわかる。この方程式を解き，一体ハミルトニアンの固有値と固有関数を求めよう。

ゲージ1：y ゲージ

固有値方程式は次のベクトルポテンシャル

$$(A_x(x), A_y(x)) = B(y, 0) \tag{7.10}$$

で解くのが最も簡単である。このとき，固有値方程式，

$$\frac{(p_x + eBy)^2 + (p_y)^2}{2m}u = Eu \tag{7.11}$$

は変数 x を陽に含まないので固有関数の x 方向は平面波である。関数を変数分離形

$$u(x,y) = e^{ik_x x}v(y) \tag{7.12}$$

とおいて方程式に代入すると，変数 y だけについての固有値方程式

$$\frac{e^2B^2(y+y_0)^2 + (p_y)^2}{2m}v = Ev \tag{7.13}$$

$$y_0 = \frac{p_x}{eB}$$

が得られる。ところで，この方程式はバネ定数 $k = e^2B^2/m$ の調和振動子に対するものであり，解は

$$v_l(y) = \left(\frac{eB}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{2^{l/2}(l!)^{1/2}} e^{-\frac{eB}{2\hbar}(y+y_0)^2} H_l\left((y+y_0)\left(\frac{eB}{\hbar}\right)^{1/2}\right) \tag{7.14}$$

$$E_l = \hbar\omega\left(l + \frac{1}{2}\right) \tag{7.15}$$

となる。ここで l は 0, 1, 2, 3 等の整数をとる。一体固有値方程式はとびとびの固有値と，二乗可積分の固有関数をもつ束縛状態だけからなる。また固有値は x 方向の波数ベクトル k_x によらない。だから，相異なる固有関数が同じエネルギーをもつことになる。つまりエネルギーの縮退がある。縮退の程度を示す縮退度を二次元面が有限の大きさ L_x と L_y であるとして見積ってみよう。x 方向には周期境界条件を課す。すると

$$e^{ik_x(x+L_x)} = e^{ik_x x} \tag{7.16}$$

より波数は任意の値をとるのではなく，ある整数 n より，

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x \tag{7.17}$$

なる関係で結びつく。一方 y 方向には関数が y_0 を中心とするガウス的関数である。そのため，中心の位置が面内にあるための条件，

$$y_0 \leq L_y \tag{7.18}$$

を満たす必要がある。$y_0 = \frac{p_x}{eB}$ を式 (7.18) に代入して，整数 n の条件

$$n_x \leq \frac{eB}{2\pi} L_x L_y \tag{7.19}$$

が得られる。この条件を満たす最大の n_x の値が縮退度である。縮退度は面積 $S = L_x L_y$ に比例しているので単位面積あたりの縮退度が一定である。単位面積あたりの縮退度は，

$$\rho_0 = \frac{eB}{2\pi} \tag{7.20}$$

と磁場の強さに比例する。磁場が強いほうが縮退度が大きくなるが，一方エネルギー間隔も磁場に比例している。だから有限のエネルギー間隔内での状態数は磁場によらず一定である。磁場が 0 の場合も同じで，状態密度は一定である。これは空間が 2 次元であるときの特徴である。磁場がない系ではエネルギーは連続であったが，一様な磁場のもとではエネルギーはとびとびとなり，各エネルギーで単位面積あたり ρ_0 の異なる状態がある。

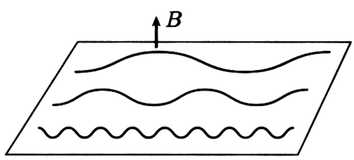


図 7.2 y ゲージの波動関数

縮退度が面積に比例するため，無限に大きな 2 次元上では縮態度は無限大である。以上の一体電子の波動関数の縮退度に加えて，多体電子状態はさらに大きな縮退をもつ。フェルミ・ディラック統計に従う電子は一つの状態に一つの電子が占める。縮退した N 個の一体状態から M 個の状態を取り出す場合の数，

$$_N C_M = \frac{N!}{M!(N-M)!} \tag{7.21}$$

が，多体の縮退度を表しこの数は非常に大きくなる。この事情が，量子ホール場の理論を極めて難しく，また面白くしている。自由場で存在する大きな縮退

は，しかしながら不純物や相互作用等の様々な効果でとけることが多い。一体エネルギーの縮退は不純物によりとかれる。この問題を後で調べる。また多体状態の縮退が相互作用によりとかれる効果も後で詳しく調べる。

ゲージ 2：対称ゲージ

ベクトルポテンシャルとして，対称的な形

$$\boldsymbol{A} = \frac{B}{2}(y, -x) \tag{7.22}$$

を使い固有値問題を解く場合では複素関数論が使える。このとき，

$$p_x + eA_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + e\frac{B}{2}y \tag{7.23}$$

$$p_y + eA_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} - e\frac{B}{2}x \tag{7.24}$$

より，最低ランダウ準位の条件は

$$a|0\rangle = 0 \tag{7.25}$$

$$a = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{eB}{2\hbar}\bar{z}\right) \tag{7.26}$$

$$z = x + iy \tag{7.27}$$

で，解は

$$|n\rangle = H_n(z)e^{-\frac{z\bar{z}2\hbar}{eB}} \tag{7.28}$$

となる。ここで $H_n(z)$ は複素数 z の関数である。

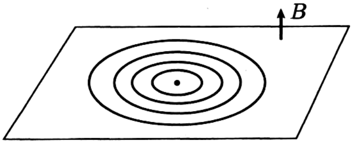


図 7.3 対称ゲージの波動関数

y ゲージの固有関数は空間の 2 方向で性質が大きく異なる。x 方向では平面波であるため無限に広がっていて，y 方向では調和振動子の固有状態と同じでガウス関数と多項式の積である。無限に広がっている関数であるため，あとで述べるように内部自由度と空間の自由度を分離する理論形式には適さない。また 対称ゲージ で関数は中心が固定されているため，関数の空間が実空間の対称性を直接反映しにくい。そのため，空間の対称性と関連する物理の問題を調べるにはやはり適さない。空間の対称性と相性のいい表示は，実空間で一様で 2 方向に対称である関数の集まりからなるものである。

7.2.2 中心座標と相対座標

空間の小さな領域で値をもち，中心が異なるものをすべて含む関数があれば，長波長領域や低エネルギー領域で有効である多重極展開の考えを適用することが可能であり，場の理論の計算上好都合である。このような表現を使うことにより，物理に対する見通しもはるかによくなる。さらに詳しくこの問題を調べるのに，電子の座標 (x, y) をサイクロトロン円運動の中心を示す中心座標と中心からのずれを示す相対座標との2変数の組に分解するのが便利である。このため，$(v_x, v_y) = \frac{1}{m}(p_x + eA_x, p_y + eA_y)$ を使う，

$$x = X + \xi \tag{7.29}$$

$$y = Y + \zeta \tag{7.30}$$

$$\xi = \frac{v_y}{w_c} \tag{7.31}$$

$$\zeta = -\frac{v_x}{w_c} \tag{7.32}$$

とおく。ここで $w_c = eB/m$ はサイクロトロン振動数であり，(X, Y) が中心座標で，(ξ, ζ) が相対座標である。これらの座標は交換関係

$$[X, Y] = i\hbar\frac{1}{eB} \tag{7.33}$$

$$[\xi, \zeta] = -i\hbar\frac{1}{eB} \tag{7.34}$$

を満たす。また，一体ハミルトニアンは

$$H_0 = {w_c}^2\frac{\xi^2 + \zeta^2}{2m} \tag{7.35}$$

と相対座標だけで書かれる。上記交換関係とこの一体ハミルトニアンより，この系の固有値は調和振動子の固有値と同等な $\hbar\omega_c(l + 1/2)$ である。

中心座標の変数 (X, Y) は，相対座標 (ξ, ζ) と

$$[X, \xi] = [X, \zeta] = 0 \tag{7.36}$$

$$[Y, \xi] = [Y, \zeta] = 0 \tag{7.37}$$

と可換であり，一体ハミルトニアンと可換である。このため，中心座標で張られる空間は縮退した空間を表している。交換関係のために X と Y との両者を同時に対角化することはできない。これらは，かわりに分散が不確定性関係，

$$(\delta X)^2(\delta Y)^2 \geq \frac{1}{e^2B^2} \tag{7.38}$$

を満たしている。いかなる状態に対しても，この不等式または等式が成立する。等式が満たされるのは，特別の状態の場合に限られる。広がりの積は，このとき最小になっている。

7.2.3　フォンノイマン格子

上記不確定性関係の積は，生成演算子の固有状態であるコヒーレント状態，

$$(X + iY)|z\rangle = (z)|z\rangle \tag{7.39}$$

で最小となる。磁場中の電子の表現に，このコヒーレント状態が使える。すべての複素数の固有値に対応するコヒーレント状態が張る空間は完全系をなすので，この関数の集合を考えることが多い。しかしこの場合の関数基底は，over complete であり一次独立でない関数がたくさん含まれている。一次独立な関数だけで完全な基底を張れば，計算に便利であり系統的な理解がしやすい。完全性を保ちながら一次独立である関数の基底を，適当な部分集合から構成しよう。

この問題は調和振動子について Pereromoff や Bargmann らにより解かれ，筆者ら[2)] は，磁場中の電子系の問題に使った。複素数の空間で格子間隔 $a = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{eB}}$ の正方格子に対応する固有値をもつ関数の集合がその一つである。

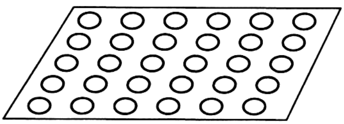


図 7.4　フォンノイマン格子

正方格子でなく 2 方向で長さの異なる長方形を使うことも可能である。この場合は長方形の面積が同じ値 a^2 になる。関数の位相は自由であるが，以下のように定義すると都合がよい。

$$|\alpha_{m,n}\rangle = \exp\left(i\pi(m+n+mn) + \pi^1/2\left(A^\dagger\frac{z_{mn}}{a} - A\frac{\overline{z}_{mn}}{a}\right)\right)|0\rangle \tag{7.40}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{\pi}}{a}(X+iY) \\ [A, A^\dagger] &= 1 \end{aligned} \tag{7.41}$$

このとき状態間の内積は，

$$\langle\alpha_{m+m',n+n'}|\alpha_{m',n'}\rangle = \exp\left(i\pi(m+n+mn) - \frac{\pi}{2}\left|\frac{z_{mn}}{a}\right|^2\right) \tag{7.42}$$

と座標の差だけの関数となる。

ところで，このコヒーレント状態と相対座標に関する一体固有状態の直積状態 $|f_l, \alpha_{m,n}\rangle$ を座標表示する関数

2)　N. Imai, K. Ishikawa, T. Matsuyama, and I. Tanaka, Phys. Rev. **B42**, 10610 (1990); K. Ishikawa, N. Maeda, T. Ochiai, and H. Suzuki, Physica **4E**, 39(1999).

$$\langle x,y|f_l,\alpha_{m,n}\rangle \tag{7.43}$$

は，座標 (x,y) が $a(m,n)$ の近傍で値をもつ関数である。位相の取り方で振る舞いは変わり，今の場合 x 方向では $1/x$ と振る舞い，y 方向では指数関数的に小さくなる。

内積が座標の差だけの関数であるので，フーリエ変換により運動量状態を導入できる。この表示では状態間の内積は

$$|\alpha_{\boldsymbol{p}}\rangle=\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}e^{ip_xm+ip_yn}|\alpha_{m,n}\rangle \tag{7.44}$$

$$\langle\alpha_{\boldsymbol{p}}|\alpha_{\boldsymbol{p}'}\rangle=\gamma(\boldsymbol{p})\sum_N(2\pi)^2\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'-2\pi\boldsymbol{N}) \tag{7.45}$$

である。ここで，$\boldsymbol{N}$ の両成分 N_x と N_y は整数であり，運動量 $\boldsymbol{p}$ 空間の基本領域は,

$$\boldsymbol{p}=(p_x,p_y) \tag{7.46}$$
$$|p_x|\le\pi,\qquad |p_y|\le\pi$$

で定義されている。座標表示で関数の内積が平行移動に対して不変であるため，異なる運動量の状態は直交する。ただし，各状態のノルムは運動量に依存する関数

$$\gamma(\boldsymbol{p})=\beta(\boldsymbol{p})^*\beta(\boldsymbol{p}) \tag{7.47}$$

$$\beta(\boldsymbol{p})=(2\,\mathrm{Im}\,\tau)^{\frac{1}{4}}\,e^{i\frac{\tau}{4\pi}p_y^2}\vartheta_1\left(\frac{p_x+\tau p_y}{2\pi}|\tau\right) \tag{7.48}$$

$$\tau=-\frac{\omega_x}{\omega_y} \tag{7.49}$$

である。関数 $\vartheta_1(z|\tau)$ は第一種のテータ関数であり，基本領域内では運動量が 0 であるときのみ 0 となり他の点では 0 にならない。また，$\beta(\boldsymbol{p})$ は自明でない境界条件

$$\beta(\boldsymbol{p}+2\pi\boldsymbol{N})=e^{i\phi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{N})}\beta(\boldsymbol{p}) \tag{7.50}$$

を満たしている。ここで，$\phi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{N})=\pi(N_x+N_y)-N_yp_x$ である.

一体ハミルトニアン H_0 は相対座標で書かれるので，この座標の関数空間は一体ハミルトニアンの固有関数

$$H_0|f_l\rangle=E_l|f_l\rangle \tag{7.51}$$

を基底として表すのが都合がよい。

強磁場中ではエネルギー差 E_l-E_{l-1} が大きくなるので，フェルミエネルギー近傍の電子はすべて一つの l の空間内にあるとする近似がよくなる。このため関数を展開する基底として，相対座標の関数と中心座標の関数の直積

$$|l,\boldsymbol{p}\rangle = |f_l\rangle \otimes |\alpha_{\boldsymbol{p}}\rangle/\beta(\boldsymbol{p}) \tag{7.52}$$

$$|\alpha_{\boldsymbol{p}+2\pi\boldsymbol{N}}\rangle = |\alpha_{\boldsymbol{p}}\rangle \tag{7.53}$$

$$\beta(\boldsymbol{p}+2\pi\boldsymbol{N}) = e^{i\phi(\boldsymbol{P},\boldsymbol{N})}\beta(\boldsymbol{p}) \tag{7.54}$$

が便利である。この関数は，運動量に関する境界条件

$$|l,\boldsymbol{p}+2\pi\boldsymbol{N}\rangle = e^{-i\phi(\boldsymbol{P},\boldsymbol{N})}|l,\boldsymbol{p}\rangle \tag{7.55}$$

を満たす。

電荷の間にはクーロン相互作用が働く。電荷密度間の相互作用ラグランジアンは，

$$L_{\text{int}} = \int d^x d^y \rho(x)\frac{V(x-y)}{2}\rho(y) \tag{7.56}$$

$$\rho(x) = \psi(x)^\dagger\psi(x) \tag{7.57}$$

$$V(x-y) = \frac{e^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{7.58}$$

と表される。式 (7.3) と式 (7.56) で量子ホール系のラグランジアンが表される。相互作用項は，電子場について 4 次であるため，ハミルトニアンの固有値問題は極めて難しくなる。これについては後で調べるが，一般に縮退がとけるとともに，物理系の性質は電子数に大きく依存する。電子密度は (7.20) 式の単位面積あたりの縮態度 ρ_0 で規格化した占有度

$$\nu = \frac{\rho}{\rho_0} \tag{7.59}$$

で表すのが便利である。縮退がとけたときは，また化学ポテンシャル項

$$\mu\psi^\dagger(x)\psi(x) \tag{7.60}$$

で電子数を表すことも可能である。

7.3　フォンノイマン表現による電子場の展開

前章で求めた一体固有関数を使い場の演算子を展開して，多体問題を調べる。ここでまず，y 表現での固有関数を使い電子場を

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int dk_x a_l(k_x)e^{ikx}u_l(y-y_0(k)) \\ \psi^\dagger(x) &= \int dk a_l^\dagger(k)e^{-ikx}u_l(y-y_0(k))\end{aligned} \tag{7.61}$$

と展開し，$a_l(k)$ を演算子として量子化する。この場合，場の交換関係は

$$\{a_{l_1}(k_1), a_{l_2}^\dagger(k_2)\} = \delta_{l_1 l_2}\delta(k_2-k_2) \tag{7.62}$$

に帰着される。この展開に基づいて場の理論の計算を行う場合，演算子はランダウ準位の変数と x 方向の波数の大きさ k をもつ。この表現では，電子密度は，

$$\rho(x) = \psi^\dagger(x)\psi(x)$$
$$= \int dk_1 dk_2 \sum a_{l_1}^\dagger(k_1) a_{l_2}(k_2) e^{-i(k_1-k_2)x} u_{l_1}(y - y_0(k_1)) u_{l_2}(y - y_0(k_2)) \tag{7.63}$$

と表せる。またフーリエ変換すると，

$$\rho(\boldsymbol{k}) = \int d^2x e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \psi^\dagger(x)\psi(x)$$
$$= \int d^2x \int dk_1 dk_2 \sum a_{l_1}^\dagger(k_1) a_{l_2}(k_2) e^{-i(k_1-k_2)x - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$
$$\times u_{l_1}(y - y_0(k_1)) u_{l_2}(y - y_0(k_2))$$
$$= \sum \int dk_1 (2\pi)^2 a_{l_1}^\dagger(k_1) a_{l_2}(k_1 + k_x)$$
$$\times \int dy e^{-ik_y y} u_{l_1}(y - y_0(k_1)) u_{l_2}(y - y_0(k_1 + k_x)) \tag{7.64}$$

となる。この積分は複雑な形をしていて具体的な計算が面倒であり，また見通しが悪い。

一方，フォンノイマン格子表現では二次元運動量をもつ関数基底が定義でき見通しがよい。これらの基底 $|l, \boldsymbol{p}\rangle$ で，電子場を

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \sum_{l=0}^{\infty} b_l(\boldsymbol{p}) \langle \boldsymbol{x} | l, \boldsymbol{p} \rangle \tag{7.65}$$

と展開する。展開係数がランダウ準位にある電子を生成する演算子となる。作用

$$S = \int dt d^2x \left[\psi^\dagger(\boldsymbol{x}, t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\boldsymbol{x}, t) \right] - \mathcal{H}_{\mathrm{total}} \tag{7.66}$$

に場の展開式を代入して，作用を展開係数を使い表すと，

$$S = \sum_l \int dt \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left[b_l^\dagger(\boldsymbol{p}, t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} b_l(\boldsymbol{p}, t) \right] - \mathcal{H}_{\mathrm{total}} \tag{7.67}$$

となる。これより，境界条件を満たす交換関係が

$$\{b_l(\boldsymbol{p}), b_{l'}^\dagger(\boldsymbol{p}')\} = \delta_{ll'} \sum_{\boldsymbol{N}} (2\pi)^2 \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}' - 2\pi \boldsymbol{N}) e^{i\phi(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{N})} \tag{7.68}$$

と得られる。作用やハミルトニアンに加えて，電流密度や電荷密度演算子も書き換える。自由場のハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_0 = \sum_l \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} E_l b_l^\dagger(\boldsymbol{p}) b_l(\boldsymbol{p}) \tag{7.69}$$

となる。電荷密度演算子や電流演算子は

$$\rho(\boldsymbol{k}) = \sum_l \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} b_l^\dagger(\boldsymbol{p}) b_{l'}(\boldsymbol{p} + a\widehat{\boldsymbol{k}}) f_{ll'}(\boldsymbol{k}) \times \exp\left[\frac{i}{4\pi} a\widehat{k}_x (2p_y + a\widehat{k}_y)\right] \tag{7.70}$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}) = \sum_l \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} b_l^\dagger(\boldsymbol{p}) b_{l'}(\boldsymbol{p} + a\widehat{\boldsymbol{k}}) \left\langle f_l \left| \frac{1}{2}\boldsymbol{v}, e^{-i(k_x\xi + k_y\eta)} \right| f_l' \right\rangle \times \exp\left[\frac{i}{4\pi} a\widehat{k}_x (2p_y + a\widehat{k}_y)\right] \tag{7.71}$$

$$f_{ll'}(\boldsymbol{k}) = \langle f_l | e^{-i(k_x\xi + k_y\eta)} | f_l' \rangle \tag{7.72}$$

と二次元運動量を使う簡単な表示が得られる。磁場中であるにもかかわらず，このような見通しがよい表現が得られることが，フォンノイマン表現の特徴である。

これらを使い物理量の性質や電流の相関関数を調べる。

7.4 電流の保存則と Ward{高橋恒等式ならびにトポロジー的不変量

電流の保存則は現在知られている法則の中でも最も普遍的な関係式であり，ほとんどすべての状況で厳密に成立していることがわかっている。古典物理の世界では，この法則は電荷が保存することを意味し，電荷密度と電流密度の間で成立する流れの式，

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} j_i(x) = 0 \tag{7.73}$$

で表せる。一方，量子論の世界では電荷密度や電流密度は場の変数で表される。そのため，これら電荷密度や電流密度は，量子論に固有な交換関係を満たす。この結果，流れの式は形式的には古典物理と同じであるが，はるかに深い意味をもち，また，これらの演算子を含むグリーン関数の間に自明でない恒等式を導く。この恒等式は QED では高次効果の取り扱い，特に繰り込み等でその威力を発揮したが，量子ホール効果の系でも別の意味で威力を発揮する。整数量子ホール効果で起きているホール伝導度の量子化

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} N \tag{7.74}$$

が後述する電流の保存則と交換関係に基づく Ward–高橋恒等式から導かれることがわかる。

電流の保存則から導かれる代表的な関係式は，電流演算子を含むグリーン関数と場の 2 点関数 (propagator) との間に成立する Ward–高橋恒等式である。Ward–高橋恒等式は，運動量を使い簡単な形で表せる。運動量を使うことは通常の場合は自明なことであり，何らの特別の意味があるわけではない。しかしながら量子ホール系には面に垂直に外部磁場がかかっている。外部磁場のために，真空中とは異なり，運動量が使えなくなる可能性がある。だから，量子ホール系で Ward–高橋恒等式がいかなる形になるのか，は自明でない興味深い問題である。また Ward–高橋恒等式が有意な結果を導くのか? も興味深い問題であるだろう。これらの問題については，前章のフォンノイマン格子表現を使うことで一つの解決法が与えられる。このとき，磁場中でも零磁場中の局所的場の理論と同様に運動量を使った Ward–高橋恒等式が成立する。また Ward–高橋恒等式より，ホール伝導度が特殊なトポロジー的不変量であることがわかる。

電子場をフォンノイマン格子表現で展開し，磁場中にある電子を生成消滅する演算子を導入し，電流密度や電荷密度等の演算子に代入する。これより，量子ホール系の性質を反映した形で物理量を表せる。これらの表示で，展開係数であるホール系の場と電荷密度の間に交換関係，

$$[\rho(\boldsymbol{q},t_1), b_l(\boldsymbol{p},t_2)]\delta(t_1-t_2) = -\Gamma_{ll'}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})b_{l'}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q},t_2)\delta(t_1-t_2) \tag{7.75}$$

$$[\rho(\boldsymbol{q},t_1), b_l^\dagger(\boldsymbol{p},t_2)]\delta(t_1-t_2) = \Gamma_{ll'}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})b_{l'}^\dagger(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q},t_2)\delta(t_1-t_2) \tag{7.76}$$

が満たされる。ここで右辺の $\Gamma_{ll'}(p,q)$ は，

$$\Gamma_{ll'}(p,q) = f_{ll'}(\boldsymbol{q})\exp\left[\frac{i}{4\pi}a\widehat{q}_x(2p_y + a\widehat{q}_y)\right] \tag{7.77}$$

である。この恒等式は各 l ごとに独立な交換関係が成立していることを示している。磁場の影響は複素関数 $\Gamma(p,q)$ に現れている。$\Gamma(p,q)$ は磁場だけで決まるものであり，$\Gamma(p,q)$ の性質が磁場中での電子系の特徴を与える。

さて，関数 $\Gamma(p,q)$ を q で

$$\Gamma(p,q) = \Gamma(p,0) + q_i\Gamma(p,0)^i + q_iq_j\Gamma(p,0)^{ij} + \cdots \tag{7.78}$$

とテイラー展開してみよう。これはある種の多重極展開である。

有限の領域に電荷密度が存在するときのポテンシャル問題でよく行う多重極展開では，電荷分布 $\rho(\boldsymbol{x})$ がつくるポテンシャル $V(\boldsymbol{x})$ を

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\int d\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')\frac{1}{\sqrt{1-2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'/x^2+(x'/x)^2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\int d\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')\left(1+\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(Q\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}+d_i\frac{x_i}{|\boldsymbol{x}|^3}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \tag{7.79}$$

と表す。ここで総電荷 Q や二重極モーメント d_i は

$$Q = \int d\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}') \tag{7.80}$$

$$d_i = \int d\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')x_i \tag{7.81}$$

である。四重極以上のモーメントも同様に表せる。これらのモーメントが有限であるとき，多重極展開が意味をもつ。このように展開しておくことにより $|\boldsymbol{x}|$ が大きいときのポテンシャルの振る舞いが簡単に表せる。二重極モーメント d_i は電荷分布に非対称性があるとき有限になる。これは誘電体で実現している。

さて，今本章で行う交換関係の展開 (7.75) は単純な多重極展開ではない。しかし，運動量 q が小さいことは，座標に換算すると x が大きいことに対応する。だから両者はよく似ていると言える。多重極展開を場の理論に拡張していると思えばよいであろう。

交換関係の式で q の 1 次の項が含まれている。これは二重極モーメントがあることに対応している。 このため，この関係式は極めて普遍的で強力な恒等式であるが扱いが複雑である。また各 (ll') ごとに成立するため，自明ではない式である。そのため自明でない関係式を導くことになる。その一つが，電流密度を含むグリーン関数

$$\int dz_0dx_0dx_0'\,e^{iq_0z_0-ip_0x_0+ip_0'x_0'}\langle T(j^\mu(z_0,\boldsymbol{q})\widetilde{b}_l(x_0,\boldsymbol{p})\widetilde{b}^\dagger_{l'}(x_0',\boldsymbol{p}'))\rangle$$
$$= (2\pi)^3\delta(p+Q-p')\widetilde{S}_{ll_1}(p)\widetilde{\Gamma}^\mu_{l_1l_2}(p,p+Q)\widetilde{S}_{l_2l'}(p+Q) \tag{7.82}$$

に現れる。右辺の $\widetilde{S}_{ll'}(p)$ はランダウ準位にある電子の伝播関数であり，

$$\int dxdx'\,e^{ipx-ip'x'}\langle T(\widetilde{b}_l(x)\widetilde{b}^\dagger_{l'}(x'))\rangle = (2\pi)^3\delta(p-p')\widetilde{S}_{ll'}(p) \tag{7.83}$$

と定義される。各ランダウ準位ごとに演算子が定義されているため，伝播関数は行列で定義される。この点，四次元時空で 4 成分をもつディラック場の伝播関数と同様の位相的性質をもつ。

電流保存則と同時刻交換関係 (7.75) 式より，グリーン関数は恒等式

$$\widetilde{\Gamma}_\mu(p+q,p)q^\mu = t^\nu{}_\mu(\Gamma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\widetilde{S}^{-1}(p+q)-\widetilde{S}^{-1}(p)\Gamma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})) \tag{7.84}$$

を満たす。この式は $\Gamma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ のために，通常の形とは異なる。

7.4.1　エネルギー表現から電流表現への基底の変換

電荷密度と場との交換関係や Ward–高橋恒等式は，通常の局所的場の理論のものより複雑になっている。特に (7.84) 式の右辺に運動量の 1 次の項が現れている。これは，場で表されるホール系の粒子は有限な二重極モーメントをもつことを意味している。しかも，二重極モーメントは外部磁場だけで決まっている。

運動量表示で場をユニタリー変換して，この二重極モーメントをもたない場の表示に移ることができる。これを見てみよう。ユニタリー行列，

$$U_{ll'}^{\dagger}(\boldsymbol{p}) = \langle f_l | e^{i(\widetilde{p}_x\xi+\widetilde{p}_y\eta)/a-\frac{i}{4\pi}p_xp_y} | f_{l'}\rangle \tag{7.85}$$

$$\widetilde{p}_i = W_{ij}^{-1}p_j \tag{7.86}$$

を使い，ユニタリー変換

$$\widetilde{b}_l(\boldsymbol{p}) = \sum_{l'} U_{ll'}(\boldsymbol{p})b_l(\boldsymbol{p}) \tag{7.87}$$

を定義する。このとき，ハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_0 = \sum_l \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} U_{l'l}^{\dagger}E_lU_{ll''}\widetilde{b}_{ll'}^{\dagger}(\boldsymbol{p})\widetilde{b}_{l''}(\boldsymbol{p}) \tag{7.88}$$

と非対角形になる。だから，演算子でつくられる状態はハミルトニアンの固有状態ではない。しかし，電荷密度は

$$\rho(\boldsymbol{k}) = \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \sum_l \widetilde{b}_l^{\dagger}(\boldsymbol{p})\widetilde{b}_l(\boldsymbol{p}+a\widehat{\boldsymbol{k}}) \tag{7.89}$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}) = \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \sum_{l,l'} \widetilde{b}_l^{\dagger}(\boldsymbol{p}) \left\langle f_l \left| \boldsymbol{v} + \frac{a\omega_c}{2\pi}\left(\widetilde{\boldsymbol{p}} + \frac{a}{2}\boldsymbol{k}\right) \right| f_l' \right\rangle \widetilde{b}_{l'}(\boldsymbol{p}+a\widehat{\boldsymbol{k}}) \tag{7.90}$$

となり，電荷密度と電子場との交換関係は

$$[\rho(\boldsymbol{k}), \widetilde{b}_l(\boldsymbol{p})]\delta(t-t') = -\widetilde{b}_l(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\delta(t-t') \tag{7.91}$$

となり，今度は対角形になっている。この表示では粒子が有限な二重極モーメントをもたないことを意味する。その結果，Ward–高橋恒等式は通常の局所的場の理論と一致する，

$$\widetilde{\Gamma}_\mu(p,p) = t^{\nu}{}_{\mu}\frac{\partial \widetilde{S}^{-1}(p)}{\partial p^{\nu}} \tag{7.92}$$

となる。Ward–高橋恒等式を使い，電流の相関関数

$$\begin{aligned}\pi^{\mu\nu}(q,q') &= \int dxdx' e^{iqx-iq'x'}\langle T(j^{\mu}(x)j^{\nu}(x'))\rangle \\ &= (2\pi)^3\delta(q-q')\pi^{\mu\nu}(q) + \pi_{(2)}^{\mu\nu}(q,q')\end{aligned} \tag{7.93}$$

で運動量保存項 $\pi^{\mu\nu}(q)$ の原点における傾きであるホール伝導度が

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{3!}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\rho \pi_{\mu\nu}(q)|_{q=0} \tag{7.94}$$

と表せる。さらに電子の伝播関数を使い,

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}N_w \tag{7.95}$$

$$N_w = \frac{1}{24\pi^2}\int_{\mathrm{BZ}\times S^1} d^3p\epsilon_{\mu\nu\rho} \times \mathrm{Tr}\left(\partial_\mu \widetilde{S}^{-1}(p)\widetilde{S}(p)\partial_\nu \widetilde{S}^{-1}(p)\widetilde{S}(p)\partial_\rho \widetilde{S}^{-1}(p)\widetilde{S}(p)\right) \tag{7.96}$$

とホール伝導度が特殊な位相不変量の形で書ける。Ward–高橋恒等式は電流保存の式ならびに電荷密度と場との交換関係だけに基づいて導出されている。そのため, 相互作用や不純物, 境界の効果等の摂動項が加わっても成立する。これは整数量子ホール効果のトポロジカルな証明の基礎を与える。この証明を以下与えよう。

7.5 整数量子ホ ール効果

実際の半導体で, 電子占有率が整数の近傍でホール伝導度が量子化される。これが, 整数量子ホール効果である。前記の結果から電流演算子対のグリーン関数 (電流の相関関数)

$$\pi^{\mu\nu}(q,q') = \int dxdx' e^{iqx-iq'x'}\langle T(j^\mu(x)j^\nu(x'))\rangle = (2\pi)^3\delta(q-q')\pi^{\mu\nu}(q) + \pi^{\mu\nu}_{(2)}(q,q') \tag{7.97}$$

の性質を調べる。ファインマンダイアグラムで考えると最低次のものが図 7.5 であり, 次のものが図 7.6 である。

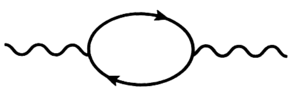


図 7.5 電流の相関関数

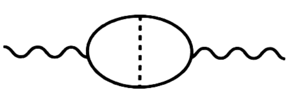


図 7.6 電流の相関関数の 2 次補正

さらに最低次の項を外線の運動量 q_μ で

$$\pi^{\mu\nu}(q) = C^{\mu\nu}_\rho q^\rho + 0(q^2) \tag{7.98}$$

と展開しよう。ここで定数項が 0 であることを使った。運動量についての線形項,

$$C_\rho^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial q_\mu}\pi^{\mu\nu}(q)|_{q=0} \tag{7.99}$$

はホール伝導度と関係している。ホール伝導度は電流が直交する電圧に比例するときの比例係数である。

$$I_i = \sigma_{ij}V_j \tag{7.100}$$

これが，電流演算子の相関関数から反対称テンソルを使い

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{3!}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\rho\pi_{\mu\nu}(q)|_{q=0} \tag{7.101}$$

と表せる。これはさらに Ward–高橋恒等式を使うと，

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}N_w \tag{7.102}$$

$$N_w = \frac{1}{24\pi^2}\int_{\mathrm{BZ}} d^3p\,\epsilon_{\mu\nu\rho}\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu\widetilde{S}^{-1}(p)\widetilde{S}(p)\partial_\nu\widetilde{S}^{-1}(p)\widetilde{S}(p)\partial_\rho\widetilde{S}^{-1}(p)\widetilde{S}(p)\right) \tag{7.103}$$

と表せる[3)](図 7.7)。この形は，写像に関するトポロジー的不変量の形をしている。今の場合，写像としては，三次元運動量の空間から 2 点関数 (propagator) の行列の空間への写像が対応している。運動量が空間上の格子の空間からのフーリエ変換で定義されているため，二次元運動量空間はトーラスで定義されているコンパクトな空間である。時間をフーリエ展開したエネルギーに対しては $-\infty$ から $+\infty$ までの領域が対応しているため，一見コンパクトではない。しかしエネルギーに小さな虚数部分を与えた 2 点関数の二つのフェルミエネルギーでの差で定義される積分

$$N_w(E_{F^1}) - N_w(E_{F^2})$$
$$= \frac{1}{24\pi^2}\int_{\mathrm{BZ}\times \mathrm{s}_1} d^3p\,\epsilon_{\mu\nu\rho}\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu\widetilde{S}^{-1}(p)\widetilde{S}(p)\partial_\nu\widetilde{S}^{-1}(p)\widetilde{S}(p)\partial_\rho\widetilde{S}^{-1}(p)\widetilde{S}(p)\right) \tag{7.104}$$

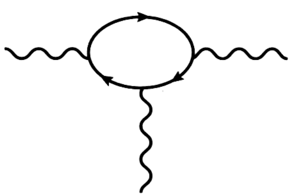


図 7.7 ホール伝導度のダイアグラム

3) K. Ishikawa and T. Matsuyama, Zeit Phys. **C33**, 41-45(1986); Nucl. Phys. **B280** (FS18), 523-548(1987). 228 ページの論文も参照のこと。

はコンパクトな空間上の積分と考えられる。E_F^1 と E_F^2 の近傍で $S(p)$ が特異性をもたないとき，

$$N_w(E_F^1) - N_w(E_F^2) \tag{7.105}$$

は厳密に整数になり，しかも，E_F^1 や E_F^2 を変化させても変わらない。これは，フェルミエネルギーがエネルギーギャップにあるときや，局在領域にあるとき成り立つ。局在領域では一粒子波動関数は規格化可能の関数である。そのため空間的に有限の大きさをもち電気伝導には寄与しない。とびとびのエネルギー値をもつ局在関数が有限の間隔を占めているのが局在領域である。そのため，フェルミエネルギーが局在領域にあるときは，フェルミエネルギーの変化は電子占有率の変化を引き起こすにもかかわらず，電気伝導度は一定に保たれる。この領域では，$N_w(E_F^1) - N_w(E_F^2)$，すなわちホール伝導度が電子占有率が変化しても厳密に整数に量子化された一定値に保たれる。

じつは，量子ホール系に不純物があるとき，有限のエネルギーの幅で局在領域が生成される。この局在領域のエネルギー範囲内にフェルミエネルギーがあるとき，上記条件が満たされる。これが起きたのが整数量子ホール効果である。今までは，相互作用の効果や不純物の効果を考えなかったが，これらの寄与があるとき整数量子ホール効果がどうなるかが重要な問題である。これについて次に調べよう。

7.5.1 整数量子ホール効果と相互作用

上で得られたいくつかの関係式やホール伝導度が厳密に量子化されることは相互作用で修正されるのだろうか? 電子の異常磁気モーメントのように通常の物理量は相互作用からの高次補正を受ける。補正を調べることは場の理論として興味深い重要な問題である。

量子化されたホール伝導度は，相互作用からの補正をもたない特異な物理量である。このような物理量は少ない。今までの議論で電流の保存則や交換関係等の恒等的に成り立つ関係式が，ホール伝導度の安定性を保証していた。さらに，これらの普遍的な関係式が相互作用に対する安定性も保証する。その結果，量子化されたホール伝導度は相互作用がある系でも，トポロジー的不変量であり厳密に量子化される。

相互作用としては，量子電気力学の高次効果や物質の格子振動からの効果等がある。前者に関しては，単純な相互作用の効果を調べることに加えて，紫外発散を処理する繰り込みとの関連が明らかにされる必要がある。繰り込みに際

しては，電子の電荷と質量が入力されるパラメーターとして実験値が使われる。物質中では電子が多数あるため，仮想状態の効果は真空中とは異なる。そのため，電子の電荷が，真空中とは異なる。この違いが量子化されるホール伝導度に現れるかどうか。これらの問題の考察では，電流の保存則やWard–高橋恒等式の役割が重要である。

まず相互作用による効果について考察し，発散や繰り込みについては後にまわすことにする。フォンノイマン表現に基づく我々の表現法では磁場中においても二次元運動量が保存する。磁場に起因する特徴は，運動量と独立な内部自由度をもつことと，時間反転に対する不変性を破ることである。じつは，磁場は必須条件ではなく，これらの対称性に対する性質をもつことが重要な条件である。磁場なしでも，これらの対称性に対する性質をもつ多粒子系は，普遍的な「量子ホール伝導度」を示す。この性質をもつ最も簡単な理論は時空3次元のQEDである。この系は，独立な2成分をもち時間反転不変性を破る。磁場がないので通常のホール伝導度は定義できないが，直交する電流と電圧との比であるところのある種の「ホール伝導度」が有限になり，しかも相互作用の補正がない。この事情を明らかにしておくことは，量子ホール効果の一つの本質を知るのに役立つ。

7.5.2 三次元QED

時空三次元のディラック場 $\psi(x)$ は四次元時空上のディラック場と一見同じ方程式,

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{7.106}$$

を満たす。ここで γ_μ は代数

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \tag{7.107}$$

を満たす行列である。γ_μ は必ず (偶数)^2 の行列で，四次元時空では4行4列であり，三次元時空では2行2列である。スピンでよく出てくるパウリ行列,

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.108}$$

$$\gamma_1 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.109}$$

$$\gamma_2 = i\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \tag{7.110}$$

が三次元時空での代数を満たす最も簡単な例である。これらは3個の γ_μ 行列の積が,

$$\gamma_0\gamma_1\gamma_2 = i \tag{7.111}$$

と単位行列に比例することが四次元時空の γ 行列と大きく異なる点である。このため，時空四次元や二次元で存在する γ_5 は存在しない。だから，軸性ベクトルもなく，当然軸性アノマリーもない。しかし，軸性アノマリーと同じ起源をもち，ディラック演算子の性質やトポロジーと関連する現象がある。

γ 行列の積が有限なトレースをもつことより，四次元時空の QED で奇数個の光子からなるグリーン関数は 0 になるというファリーの定理が 3 次元では成り立たない。

この系に外場としての電磁場が結合したとき，ラグランジアンは

$$L = \overline{\psi}(x)(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi(x) + ej_\mu A^\mu \tag{7.112}$$

$$j_\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \tag{7.113}$$

となる。電流演算子の相関関数，

$$\langle 0|T(j_\mu(x)j_\nu(y))|0\rangle \tag{7.114}$$

をフーリエ変換して

$$\Pi_{\mu\nu}(q)(2\pi)^3\delta(q-q') = \int d^3xd^3ye^{iqx-iq'y}\langle 0|T(j_\mu(x)j_\nu(y))|0\rangle \tag{7.115}$$

と $\Pi_{\mu\nu}(q)$ が得られる。さらに，電流保存則

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}j_\mu(x) = 0 \tag{7.116}$$

より，

$$\begin{aligned} q^\mu\Pi_{\mu\nu}(q) &= 0 \\ q^\nu\Pi_{\mu\nu}(q) &= 0 \end{aligned} \tag{7.117}$$

が満たされている。

ここで，$\Pi_{\mu\nu}(q)$ を q についてテイラー展開し，

$$\Pi_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} + D^\rho_{\mu\nu}q_\rho + Dq_\mu q_\mu + D'q^2g_{\mu\nu} + \cdots \tag{7.118}$$

とおいてみよう。ここでローレンツ不変性より，c 数はすべてスカラー量であるはずである。ローレンツ共変な c 数の物理量はないので

$$C_{\mu\nu} = 0 \tag{7.119}$$

が成り立つ。また電流保存則より，

$$\begin{aligned} q^\mu\Pi_{\mu\nu} &= D^\rho_{\mu\nu}q_\rho q^\mu + (D+D')q^2q_\nu \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7.120}$$

となる。この式は任意の運動量 q_μ で満たされる恒等式である。そのため $D^\rho_{\mu\nu}$ は反対称テンソルに比例し，$D+D'=0$ となる。結局，

$$\Pi_{\mu\nu} = C^{(1)}(q_\mu)(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu) + C^{(2)}(q_\mu)\epsilon_{\mu\nu\rho}q^\rho + \cdots \tag{7.121}$$

が求める一般的な展開式である。ここで，$C^{(1)}(q_\mu)$ と $C^{(2)}(q_\mu)$ にはこれ以上の制限はつかず，q_μ の任意な関数でよい。今の場合，これらが摂動論を使うことにより，

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(q) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\frac{1}{\gamma p - m}\gamma_\nu\frac{1}{\gamma(p+q)-m}\right]\\ &= (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)C^{(1)}(q) + \epsilon_{\mu\nu\rho}q^\rho C^{(2)}(q)\end{aligned} \tag{7.122}$$

と求まる。ここで特に $C^{(2)}(0)$ は運動量表示における伝播関数から

$$C^{(2)}(0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\frac{1}{\gamma p - m}\gamma_\nu\frac{1}{\gamma p - m}\gamma_\rho\frac{1}{\gamma p - m}\right] \tag{7.123}$$

と表せる特殊な物理量であることに着目しよう。この表示は，

$$C^{(2)}(0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\mathrm{Tr}\left[\frac{\partial}{\partial p_\mu}S^{-1}(p)S(p)\frac{\partial}{\partial p_\nu}S^{-1}(p)S(p)\frac{\partial}{\partial p_\rho}S^{-1}(p)S(p)\right] \tag{7.124}$$

$$S(p) = \frac{1}{\gamma p - m} \tag{7.125}$$

の形をした，特殊なトポロジー的不変量である。具体的な計算から，$C^{(2)}(0)$ は

$$C^{(2)}(0) = \frac{1}{4\pi}\frac{m}{|m|} \tag{7.126}$$

となる。

このように求まった電流の相関関数から，電磁場に対する有効ラグランジアンが得られる[4)]。今の場合，有効ラグランジアンは

$$\begin{aligned}L = &\; C^{(2)}(0)\epsilon_{\mu\nu\rho}A_\mu(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\rho(x)\\ &+ C^{(1)}(0)A_\mu(x)(g^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu(x) + \text{高次微分項}\end{aligned} \tag{7.127}$$

である。この表示より，電場と直交する電流である “ある種のホール電流” が流れることがわかる。磁場がないにもかかわらず電場と直交する電流が流れるのは，空間反転や時間反転対称性が破れているためである。また，軸性アノマリーとも関連している。

磁場なしに生ずる「ホール効果」の起源を調べるため，x 方向に一様な電場がある状況で電流の期待値を求める。ベクトルポテンシャルが

$$A^0 = xE, \quad A^1 = A^2 = 0 \tag{7.128}$$

---

4) K. Ishikawa, Phys. Rev. Lett. **53**, 1615-1618(1984) ; Phys. Rev. **D31**, 1432-1442 (1985).

であるとき，y 方向の電流期待値は，

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_2 \frac{1}{\gamma_0(p^0 + A^0(x)) - \gamma_1 p^1 - \gamma_2 p^2 - m}\right] \tag{7.129}$$

と決まる。これを

$$-\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\gamma_0\gamma_2(p^0 + A^0(x)) - \gamma_1\gamma_2 p^1 + p^2 - m\gamma_2}\right] \tag{7.130}$$

と書き直す。演算子 $\gamma_0\gamma_2(p^0 + A^0(x)) - \gamma_1\gamma_2 p^1$ のスペクトルは γ_2 の固有値について非対称となっている。

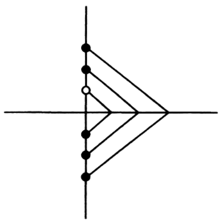


図 7.8 スペクトルの非対称性

これは二次元軸性アノマリーの起源となるものである。このスペクトルの非対称性が磁場がない系でのホール電流の起源であり，軸性アノマリーと同じ起源である。

以上は外場中の問題であった。さらに他の場が電子と相互作用しているとき，この物理量はどうなるであろうか？ 一つの例として，スカラー場が相互作用しているとしよう。このとき，ラグランジアンは

$$L = \overline{\psi}(x)(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi(x) + ej_\mu A^\mu + g\overline{\psi}(x)\psi(x)\varphi(x) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi(x))^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\varphi(x))^2 \tag{7.131}$$

で与えられる。$C^{(2)}(0)$ に対するスカラー場からの補正は，図 7.9 のファインマンダイアグラムで表される。これらのダイアグラムからの高次補正は，$\Pi_{\mu\nu}(q)$ の q についての展開における 2 次以上の項にだけあり，q について 1 次の項には

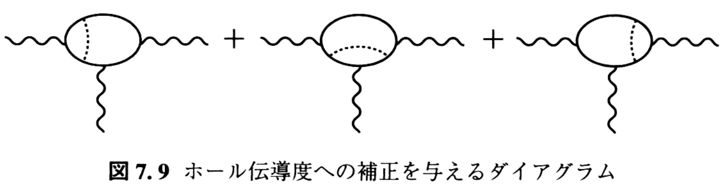


図 7.9 ホール伝導度への補正を与えるダイアグラム

ない。この事実は，電流の保存則を使い証明が行われる。高次補正に発散が現れるときは，繰り込みを行う。この際，vertex 部と propagator の間に Ward–高橋恒等式が成り立つ。だから繰り込まれた量で表すと，ホール伝導度が

$$C^{(2)}(0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\mathrm{Tr}\left[\frac{\partial}{\partial p_\mu}S^{-1}(p)S(p)\frac{\partial}{\partial p_\nu}S^{-1}(p)S(p)\frac{\partial}{\partial p_\rho}S^{-1}(p)S(p)\right] \tag{7.132}$$

$$S(p) = \frac{1}{\gamma p - m + \Sigma(p)} \tag{7.133}$$

と特殊な位相不変量として表せる。結局高次補正は打ち消されてしまう。だから $C^{(2)}(0)$ の値はスカラー場が，結合している場合でも結合していない場合と変わらない。

他の場が結合している場合でも繰り込み可能である限り事情は同じである。もしも電荷や場の繰り込みが不要の場合にも，話は変わらない。

上の式の変形で電流の保存則，電荷密度と場との交換関係，Ward–高橋恒等式が使われた。ホール伝導度が 0 と異なる有限な値となるのは，時間反転に対する不変性が破れているからである。

7.5.3　量子ホール効果の厳密性

ここまでの三次元 QED における「量子ホール効果」では，電流の保存則，電荷密度と場との交換関係，Ward–高橋恒等式のため高次補正が消失した。これらが成立する量子ホール効果でも，同じことが成り立つ。その結果，量子化ホール伝導度は厳密に量子化される。量子ホール系をフォンノイマン表現により定式化することで，このことがあからさまになる。

摂動論の最低次では，外場との相互作用だけを考慮し電子の 1 ループでの計算が行われる。これは 以前見たように，特殊な位相不変量である。今の場合この値は，フェルミエネルギーとともに変化し，図 7.10 のように振る舞う。

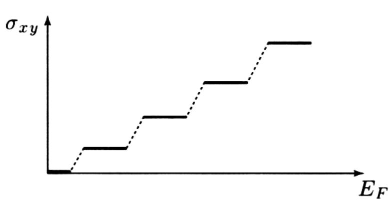


図 7.10　ホール伝導度のフェルミエネルギー依存

次にフォノンや光子等の他の場との相互作用の効果を調べる。この問題も，三次元 QED の場合と同じ方法で考察される。前の節で見たように，キーとなる関係式である電流保存則と運動量による Ward–高橋恒等式が，量子ホール系でも成立している。フォンノイマン表現による定式化では，ランダウ準位ごとに運動量を使う行列の形で Ward–高橋恒等式が成立する。この結果 1 ループの計算で特殊な位相不変量になるホール係数は，高次補正をもたない。

では，物質中で繰り込まれた電荷は，真空中の電荷と異なるはずであるが，量子ホール効果にこの効果はどう効くであろうか？ この場合は，物質中の電荷の 2 乗に比例する値が測定されるかに見える。しかしながら，電荷の繰り込みで電流や電圧 (電場) が同じ効果を受けることを考慮に入れると，最終的に観測されるのは真空中の電荷の 2 乗に比例するものである。ここでも Ward–高橋恒等式がキーとなる。

ここまでは，相互作用がある系を考察した。不純物がある系では，平行移動不変性がないので，運動量を使うことは一般にはできない。しかしながら，バルク物理量には例外的に運動量を使う表示が使える。ホール抵抗はバルク物理量の一つであり，全電流と全電圧との比である。このため，空間や時間で積分した演算子の相関関数が，ホール抵抗である。不純物がある系でも時間や空間で積分することにより，運動量が保存するダイアグラムだけが寄与することになる。このダイアグラムは，平行移動に対して不変な表示を可能とする。この表示では，不純物の効果は相互作用の効果と同じに扱える。この結果，不純物がある系での整数量子ホール効果の厳密性が証明された。

7.6 不純物ポテンシャル

7.6.1 系のスペクトルと超対称理論

短距離不純物ポテンシャルは，

$$V(x) = \sum_i g_i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_i) \tag{7.134}$$

であり，各不純物の結合定数の大きさ g_i や位置 $\boldsymbol{X}_i$ がランダムになっている。

初め一つの不純物の効果を考えよう。$V(x)$ が加わった方程式，

$$[H_0 + V(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_i)]|\alpha\rangle = E_\alpha|\alpha\rangle \tag{7.135}$$

の解はエネルギー固有値 E_α が非摂動項 H_0 の固有値 E_l と一致しないときは，エネルギーがとびとびで波動関数が 2 乗可積分である局在状態に対応する。上

式で E_α が H_0 の固有値と異なるときは $V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_i)$ が 0 となる領域で波動関数 $|\alpha\rangle$ は 0 となる。この事情は，零磁場の系のポテンシャル問題で，非摂動項が固有値をもたない領域である負エネルギーに固有値をもつのが束縛状態であるのと同じである。量子ホール系の非摂動項の固有値 E_l は等間隔のとびとびの値をもつ。だから，これらとびとびの値の間のエネルギー領域に固有値をもつ関数は局在状態である。

不純物が希薄に分布し間隔が大きい場合でも，上の結果は変わらない。しかし不純物がたくさんになったときは事情が複雑になる。この解析には計算機による数値計算が一つの有効な方法である。数値計算の結果，やはりこれらとびとびの値 E_l の間の有限なエネルギー領域に固有値をもつ関数は局在状態である。

一方，式 (7.135) で，非摂動エネルギー E_l と一致するエネルギーをもつ固有状態は空間的に広がりをもつ解である。

次にランダムポテンシャル中のエネルギースペクトルを求めよう[5)]。グリーン関数，

$$G(E) = \mathrm{Tr}\,\frac{1}{E-H-V(x)-i\epsilon}$$
$$= N\int D\varphi(x)D\varphi^\dagger(x)\exp\int d^3x(\varphi^\dagger(x)(E-H-V(x)-i\epsilon)\varphi(x))\varphi(x)\varphi^\dagger(x) \tag{7.136}$$

$$N = \int D\psi(x)D\psi^\dagger(x)\exp\int d^3x(\psi^\dagger(x)(E-H-V(x)-i\epsilon)\psi(x)) \tag{7.137}$$

の虚数部

$$\mathrm{Im}\,G(E) = \pi\,\mathrm{Tr}\,\delta(E-H-V(x)) \tag{7.138}$$

はエネルギースペクトルを与える。上の式では規格化定数をフェルミオン場で表した。これらをまとめて，

$$G(E) = \int D\psi(x)D\overline{\psi}(x)D\varphi(x)D\overline{\varphi}(x)\varphi(x)\overline{\varphi}(x) \tag{7.139}$$

$$\exp\int d^3x(\overline{\psi}(x)(E-H-V(x)-i\epsilon)\psi(x))+(\overline{\varphi}(x)(E-H-V(x)-i\epsilon)\varphi(x))$$

と表せる。この表示では，フェルミ オン場とボソン場が一対一に対応している超対称性をもつ理論となっている。

---

5) F. Wegner, Zeit Phys. **B51** 279(1983); E. Brezin, D. Gross, and C. Itzykson, Nucl. Phys. **B235** FS[11], 24(1984).

さらに最低ランダウ準位の空間でこの表示に基づきスペクトルを求めよう。このため，場の変数を

$$\varphi = \frac{e^{\frac{-\bar{z}z}{2}}}{\sqrt{\pi}} u(z) \tag{7.140}$$

$$\overline{\psi} = \frac{e^{\frac{-\bar{z}z}{2}}}{\sqrt{\pi}} \overline{v}(z) \tag{7.141}$$

$$z = x + iy \tag{7.142}$$

とおき，さらに超対称場

$$\varphi(z,\theta) = u(z) + \theta\overline{v}(z) \tag{7.143}$$

を使い積分を計算する。このとき成立する公式，

$$\frac{1}{n}\int d\bar{\theta}d\theta(e^{-\bar{\theta}\theta}\overline{\varphi}\varphi)^n = (\overline{u}u + \overline{v}v)^n \tag{7.144}$$

と，ランダムポテンシャルの平均

$$\exp\left[-\int d^2x\, g(\alpha(x))\right] = \int \Pi DV(x)P(V(x))\exp\left(i\int d^2x\, V(x)\alpha(x)\right) \tag{7.145}$$

を使い，

$$G(E) = \int Du(z)D\overline{u}(z)Dv(z)D\overline{v}(z)\left[\frac{e^{-\bar{z}z}}{\pi}\overline{u}(\bar{z})u(z)\right]\exp(-A) \tag{7.146}$$

$$A = \int d^2z d\bar{\theta}d\theta\left\{i(E - E_0 - i\epsilon)\frac{e^{-\bar{z}z+\bar{\theta}\theta}}{\pi}\overline{\varphi}\varphi + h\left(\frac{e^{-\bar{z}z+\bar{\theta}\theta}}{\pi}\overline{\varphi}\varphi\right)\right\} \tag{7.147}$$

と

$$G = \frac{d}{dE}\ln\int_0^{\alpha} d\alpha'\, e^{-i(E-E_0-i\epsilon)\alpha'-h(\alpha')} \tag{7.148}$$

が得られる。これより，ランダムポテンシャルが

$$P(V) = \frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{V^2+\lambda^2} \tag{7.149}$$

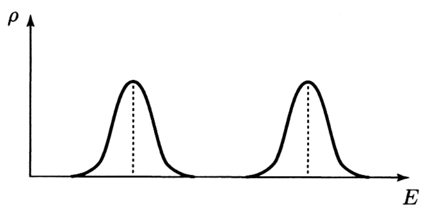


図 7.11 レベル密度

であるとき，エネルギースペクトルは

$$\pi\rho(E) = \frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{(E-E_0)^2+\lambda^2} \tag{7.150}$$

となる。ランダウ準位のスペクトルはランダムポテンシャルの影響でエネルギー的に広がったものとなる (図 7.11)。

7.6.2　ランダムな不純物ポテンシャル系と非線形シグマ模型 (レプリカ法)

多くの不純物がある量子ホール系で不純物ポテンシャルの性質の変化とともに物理系の性質がどう変化するかを知ることは，重要である。通常不純物ポテンシャルは空間的に相関のないランダムなものであるとみなせる。ランダムなポテンシャルはどう表現されるか? また，このようなポテンシャルが結合した電子系の性質はいかなる計算法で解明できるのだろうか?　計算機ではランダムな数にほぼ近い疑似ランダム数を発生することが可能である。このため，ランダムなポテンシャルを含む物理系の解明には計算機による数値計算が一つの方法である。この方法の詳細についてはこの本の範囲外であるので，ここでは触れない。他の本を参照してもらうことにする。ここでは解析的な方法であるレプリカ法[6)]について説明しよう。これは一見計算上のテクニカルな方法であるように見えるが，しかし豊富な物理的内容をもつものである。場の理論とも直接関連してくることがわかる。

不純物ポテンシャル $V(x)$ が結合した量子ホール系は，ラグランジアン

$$L_0 = \psi^\dagger(x) i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) - \psi^\dagger(x)\frac{(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})^2}{2m}\psi(x) + V(x)\psi^\dagger(x)\psi(x) \tag{7.151}$$

で表される。ある決まった物理系では $V(x)$ は決まったポテンシャルであるだろうが，取り扱いの便宜上，ポテンシャルの集まりであるとすると少し簡単になる。空間的な相関がないランダムな $V(x)$ をもつマクロな系の場合に，系全体をさらにマクロな多くの部分に分割してみよう。すると，各部分はある決まった $V(x)$ をもつが，各部分の集合から系全体がなっているので，系全体の物理量は各部分の期待値を統計平均した値で与えられる。これは一方，$V(x)$ についての統計平均して得られる結果である。だから，$V(x)$ を確率変数であるとみなして，量子論的な期待値をまず計算し，その後でさらに $V(x)$ の統計的な平均値を求めることで，ランダムな不純物ポテンシャルを含むマクロな物理系の物理量が求まる。つまり最初のステップで $V(x)$ が与えられたときの量子

6)　A. M. M. Pruiskin, Nucl. Phys. **B235** FS[11], 277 (1984).

論的な期待値の計算を行い，次のステップで $V(x)$ についてさらに統計平均した平均値の計算を行う 2 段階の計算が必要となる。第一段階では，式 (7.151) のラグランジアンに基づいて場の理論的な計算がされ，第二段階では，さらに $V(x)$ が従う統計的性質を使い計算される。

$V(x)$ がガウス的な白色ノイズであるとき，分布関数は

$$P(V(x)) = Ne^{-\int d^3x\sigma^2 V(x)^2} \tag{7.152}$$

となる。結局積分，

$$\langle O\rangle_{V(x)} = N\int DV(x)\, e^{-\int d^3x\sigma^2 V(x)^2} \frac{\langle 0\Pi O_i[V]0\rangle_{[V(x)]}}{\langle 0|0\rangle_{[V(x)]}} \tag{7.153}$$

で第二段階の統計平均の計算が求まる。これは分配関数

$$\langle O\rangle_{V(x)} = N\frac{\partial}{\partial J(x)}\int DV(x)e^{-\int d^3x\sigma^2 V(x)^2}\log Z[J] \tag{7.154}$$

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp \mathrm{Tr}\, e^{-\beta(H+\int d^3xJ_i(x)O_i(x))} \\ &= \int D\psi(x)D\psi^\dagger(x)\exp\int d^3xL_E + \sum J_i(x)O_i(x) \end{aligned} \tag{7.155}$$

の対数を重みとした積分に対応している。ここでレプリカ法では N が小さいときの，

$$\log Z = \frac{Z^N - 1}{N} \tag{7.156}$$

なる展開公式を使う。パラメーター N が 0 に近づく極限を調べるためには，当然ながら整数ではない N を考察する必要がある。N が整数の場合は，後でわかるように場の数を増やした対称性をもつ場の理論と結びつく。これより，整数 N をパラメーターとして解析的に表せる結果がわかれば，任意な N に解析接続できる可能性がある。その結果より，整数でない場合の N についての計算を行い最後に N が 0 に近い場合の値を求める。

N が整数の場合は，独立で対称的な場が N 個あるのと同等である。だから独立な場を N 個導入した場の理論の計算を行った後で，$V(x)$ についての積分を行う。この積分は比較的容易である。N が整数であるとき，

$$\begin{aligned} Z^N &= \left(\int D\psi(x)D\psi^\dagger(x)\exp\int d^3xL_E + \sum J_i(x)O_i(x)\right)^N \\ &= \int\prod_{l=1}^{N} D\psi(x)_{(l)}D\psi^\dagger_{(l)}(x)\exp\sum_{l=1}^{N}\left(\int d^3xL_E(\psi_{(l)}(x)) + J_i(x)O_i(\psi_{(l)}(x))\right) \end{aligned} \tag{7.157}$$

と自由度を N 倍に増やした場 $\psi_l(x)$ の対称的な理論の計算に帰着される。

積分の順序を変えて，N 倍した自由度をもつ電子場をもつ理論で先に不純物ポテンシャル $V(x)$ について積分しよう。まず，$V(x)$ の積分は

$$\int DV(x)\exp\int d^4x\left(-\sigma^2\left(V(x)^2+\sum_l g\psi^\dagger(x)\psi(x)V(x)\right)\right)$$
$$=N'\exp\left[-\int d^4x\frac{g^2}{4\sigma^2}\left(\sum_l \psi_l^\dagger(x)\psi(x)_l\right)^2\right] \qquad (7.158)$$

となり，電子間の四体相互作用を引き起こす。結局この四体相互作用をもつ新たな電子場の理論を調べることになる。

ここで電子対 $\psi_l^\dagger(x)\psi_m(x)$ を表す補助場を導入して四体電子相互作用を書き換えておく。次の項等式

$$1=\frac{1}{N[U]}\int DU_{ij}\exp\int d^4x$$
$$\times\left(U_{ij}^\dagger(x)-\frac{g}{2\sigma}(\psi_i^\dagger(x)\psi_j(x))^\dagger\right)\left(U_{ij}(x)-\frac{g}{2\sigma}\psi_i^\dagger(x)\psi_j(x)\right) \qquad (7.159)$$

$$N[U]=\int DU_{ij}\exp\int d^4x\big(U_{ij}^\dagger(x)U_{ij}(x)\big) \qquad (7.160)$$

から，

$$\exp\left[-\int d^4x\frac{g^2}{4\sigma^2}\left(\sum_l \psi_l^\dagger(x)\psi(x)_l\right)^2\right]$$
$$=\frac{1}{N[U]}\int DU_{ij}\exp\int d^4x\left(U_{ij}^\dagger(x)U_{ij}(x)-\frac{g}{2\sigma}U_{ij}(x)(\psi_i^\dagger(x)\psi_j(x))^\dagger\right)$$
$$-\frac{g}{2\sigma}(U_{ij}^\dagger(x)\psi_i^\dagger(x)\psi_j(x)) \qquad (7.161)$$

となる。

最後に電子場 $\psi_l(x)$ を積分して Z^N を求めることにしよう。

$$Z^N=\frac{1}{N[U]}\int DU_{ij}\exp\int d^4x\Bigg[U_{ij}^\dagger(x)U_{ij}(x)$$
$$\times\left(\det\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})^2}{2m}+J_i\Gamma_i\right)\delta_{lm}+\frac{g}{2\sigma}(U_{lm}(x)+U_{lm}^\dagger(x))\right)\Bigg]$$
$$(7.162)$$

ここで det は関数空間で定義され，任意の行列 A に対して成立する

$$\det A=\exp\mathrm{Tr}\log A \qquad (7.163)$$

の関係式より，

$$Z^N = \frac{1}{N[U]} \int DU_{ij} \exp \int d^4x \left[U_{ij}^\dagger(x) U_{ij}(x) \right.$$
$$\left. + \log \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A})^2}{2m} + J_i \Gamma_i \right) \delta_{lm} + \frac{g}{2\sigma} (U_{lm}(x) + U_{lm}^\dagger(x)) \right] \tag{7.164}$$

となる。

式 (7.164) の場の理論では，$N \times N$ の場 $U_{ij}(x)$ が力学変数である。

7.7　強相関量子ホール状態：分数量子ホール効果に対する Laughlin 変分関数

これからの章では，相互作用の効果で形成される様々な相や効果を調べよう。

7.7.1　コーンの定理

二次元強磁場中では磁場のために一粒子状態はとびとびのエネルギーをもつランダウ準位となる。エネルギー間隔は磁場に比例し，ランダウ準位の縮退度も磁場に比例する。また，長波長極限での電流演算子がハミルトニアンと簡単な交換関係を満たし，ランダウ準位を一つ上げるか下げるかする。相互作用により，このエネルギー間隔や電流演算子がもつ性質が補正を受けない低エネルギー定理が成立する。これがコーンの定理である。

波長の長い極限での電流演算子

$$\pi^i = m \int d^2x \Psi(x)^\dagger v^i \Psi(x) \tag{7.165}$$

はハミルトニアン (7.4)，式 (7.56) 式との間に，交換関係

$$[H, \pi_i] = -2\pi \sum_j \epsilon_{ij} \pi^j / m \tag{7.166}$$

を満足させる。このため，生成・消滅演算子が定義され

$$\pi_\pm = \frac{1}{\sqrt{4\pi N_e}} (\pi^x \pm i\pi^y) \tag{7.167}$$

$$[\pi_-, \pi_+] = 1 \tag{7.168}$$

$$[H, \pi_\pm] = \pm \hbar \omega_c \pi_\pm \tag{7.169}$$

を満たす。相互作用がある系の基底状態に生成演算子をかけた状態は，必ずエネルギー固有状態になることを示している。さらに励起エネルギーは磁場だけで決まり相互作用の影響を受けないで

$$H|0\rangle = E_0|0\rangle \tag{7.170}$$

$$H\pi_+|0\rangle = (E_0 + \hbar\omega_c)\pi_+|0\rangle \tag{7.171}$$

となる。また，π_+ は円偏向した波長の長い光が量子ホール系と結合する際の電流演算子である。だから，円偏向した波長の長い光により量子ホール系は必ずエネルギーギャップ ω_c をもつ状態へと励起される。

電荷間に働くクーロン相互作用は多体電子状態の縮退をとき，新しい多体状態を形成する。この問題を調べるのに，摂動論を適用することがまず初めに思いつくことである。しかし量子ホール系で一体状態は大きく縮退していて，摂動論に基づく計算ではエネルギー分母が0になり，補正項の計算はすべて発散してしまう。だから単純な摂動論をそのままで適用することは無理である。何らかの工夫を必要とするか，または摂動論とは全く異なる計算方法が必要である。一方で，この系では様々に異なる性質をもつ相が実現する。それぞれの相での特徴的な性質をうまく取り込んだ計算法が求められる。

変分法に基づく計算で非圧縮性量子流体状態をこの章で扱い，Hartree-Fock 近似法に基づく計算で複合フェルミオン状態と非等方的量子ホールガス状態をその後の章で扱う。コーンの定理はどの相でも成立するはずである。

7.7.2 最低ランダウ準位における Laughlin 変分関数[7)]

この節では電子占有率が $\nu = \frac{1}{2p+1}$ における分数量子ホール効果に適用される Laughlin 関数を考察する。

強磁場中で占有率が0と1の間にある電子数をもつ多体状態を考察しよう。強磁場下のこの占有率ではすべての電子が最低ランダウ状態にあるとみなせる。そのため，最低ランダウ状態の空間で多電子状態を表す。前節で求めた対称ゲージ

$$\boldsymbol{A} = \frac{B}{2}(y, -x) \tag{7.172}$$

の一体波動関数，

$$N_n z^n e^{-\frac{\bar{z}z}{R^2}} \tag{7.173}$$
$$z = x + iy$$

を使い多体状態を表す。N_n は規格化定数である。最低ランダウ準位の空間で，N 体状態は波動関数，

7) R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1359 (1983).

$$\Psi = F(z_1, z_2, \cdots, z_N)e^{-\sum_i \frac{\bar{z}_i z_i}{R^2}} \tag{7.174}$$

で表せる。ここで F は複素数 z_i の解析関数であり $\bar{z}_i$ を含まない。では関数 $F(z_1, z_2, \cdots, z_N)$ がどう求まるだろうか? この関数を変分的に求めることにしよう。変分関数として,

$$F = \prod_{i<j}(z_i - z_j)^\gamma \tag{7.175}$$

をとろう。γ が 1 と異なるとき，この関数は一体波動関数からつくられる単純な行列式ではない。だからこれは，一体状態の直積からつくった反対称化された波動関数とは大きく異なり相関を取り入れた関数である。だから，パラメーター γ をうまく選べば，多体状態としての固有状態に近い状態になる可能性があるであろう。まずこの状態が満たすべきいくつかの条件をまとめておこう。

1. 電子はフェルミ・ディラック統計に従うので波動関数は座標の交換に対して反対称である。
2. 電子の密度 (占有率) は一定の値をとっている。この条件は物質中の電荷密度はイオンの正電荷とあわせて中性になっていることによる。
3. 変分関数として最良の関数は一意的に決まるはずである。

条件 1. を満たすためには，γ は自明である 1 以外で，3, 5, 7 等の奇数であることが必要である。次に条件 2. を満たすにはどうすべきであろうか? γ は相対的な角運動量であるので，大きな γ は大きな角運動量を意味する。角運動量をもつとき，波動関数は二つの座標が一致するとき 0 になる。だから相対座標についての平均距離が大きくなり，ひいては密度が小さくなる。よって指数 γ と密度が関連していることが示唆される。ではより詳細にこの関係を見るにはどうすべきであろうか? Laughlin のアナロジーは，この波動関数を統計的な重み関数とみなす。

$$\Psi = \exp\left(\sum_{i<j}\gamma\log(z_i - z_j) - \sum_i \frac{|z_i|^2}{4R^2}\right) \tag{7.176}$$

この式の右辺で第 1 項は二体クーロン相互作用エネルギーの和を表し，第 2 項は一様な密度の正電荷がつくるポテンシャル中でのエネルギーを表すとみなせる。これらの項の起源はもともと，相対座標の波動関数とランダウ準位の一体波動関数の特徴であるガウス型波動関数にあるのだが，見方を変えて統計的な重みと見るときは全く役割が変わる。さらにこの解釈に合うように,

$$|\Psi|^2 = \exp\frac{1}{\gamma}\left(\sum_{i<j}2\gamma^2\log|z_i - z_j| - \sum_i \gamma\frac{|z_i|^2}{2R^2}\right) \tag{7.177}$$

と書き直す。するとこの粒子は電荷の大きさが γ である。この仮想的な系のエネルギーは背景電荷である正電荷の密度が電荷 γ の負電荷の密度と同じ大きさで打ち消すときエネルギーが最も低くなる。正電荷の密度はランダウ準位の縮退度で決まった値であるので，この条件は電子の占有率が $1/\gamma$ であることを意味する。つまり $\gamma = 3$ では占有率 $\nu = 1/3$ であり，$\gamma = 5$ では占有率 $\nu = 1/5$ である。逆に，占有率 $\nu = 1/3$ では

$$\prod_{i<j}(z_i - z_j)^3 e^{-\sum_i \frac{\bar{z}_i z_i}{4R^2}} \tag{7.178}$$

が求める関数であり，占有率 $\nu = 1/5$ では

$$\prod_{i<j}(z_i - z_j)^5 e^{-\sum_i \frac{\bar{z}_i z_i}{4R^2}} \tag{7.179}$$

が求める関数である。$\frac{1}{2p+1}$ と表せない占有率ではこの形の関数で表すことはできない。

7.7.3 Laughlin 変分関数の性質

占有率 $\nu = 1/3$ での変分関数

$$\Psi_{\mathrm{Laughlin}} = \prod_{i<j}(z_i - z_j)^3 e^{-\sum_i \frac{\bar{z}_i z_i}{4R^2}} \tag{7.180}$$

に注目する。これは以下の多くの面白い性質をもつ。

1. 一様な密度をもつ量子流体である。
2. 有限なエネルギーギャップをもつ。
3. 励起状態は分数統計に従い分数電荷をもつ。

非圧縮性量子液体

Laughlin 関数は密度が一様で一定の値をとる。上のアナロジーから，密度がほぼ一定であることはわかるが，さらにこれを確かめるのは数値的方法に依存することになる。電子数が多く熱力学的極限とみなせるときは，ほぼ完全に密度が一様になる。

密度間の相関関数から，この波動関数は対称性を破らない短距離オーダーをもつ流体系であることがわかる。何らかの連続的対称性を破る場合には，零エネルギーで長距離オーダーをもつ南部・ゴールドストーン励起モードが現れる

はずであるが，その兆候は見えない。この点，この状態は平行移動対称性が破れた電荷密度波状態やウィグナー結晶状態とは物理的に異なる状態である。

Laughlin 状態での励起状態は，波動関数 (7.180) を有限量変えた状態で表すしかない。これは，具体的には渦状態で表される。渦は角運動量をもっているので，渦の中心座標を z_0 とすると，波動関数は

$$\Psi_{z_0} = \prod_i (z_i - z_0)\Psi_{\text{Laughlin}} \tag{7.181}$$

と表せる。反渦では少々工夫が必要であり，

$$\prod_i \left(\frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{z_0}{{R_0}^2}\right)\Psi_{\text{Laughlin}} \tag{7.182}$$

である。これらはいずれも渦なしの波動関数を有限量だけ変形しているので，基底状態から有限のエネルギー差をもつ状態である。励起エネルギーの定量的な大きさを求めるのは数値的方法による。

分数統計と分数電荷

渦の中心座標 z_0 を時間の関数 $z_0(t)$ としてゆっくり動かしたときの波動関数の変化の様子から，励起状態である渦の物理的性質がわかる。磁場中で電荷 q の荷電粒子がゆっくり閉じた軌道に沿って動くときの波動関数の受ける位相変化は，

$$\gamma = e^* \Big/ \hbar c \int d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{A} = i2\pi\left(\frac{e^*}{e}\right)\phi \Big/ \phi_0 \tag{7.183}$$

である。

ここで単位磁束 ϕ_0 は $\hbar c = \frac{e\phi_0}{2\pi}$ を満たしている。位相の変化量から粒子の電荷がわかる。Laughlin 関数でこの位相は，Berry 位相として

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\gamma(t) &= i\Psi^\dagger_{z_0(t)}\frac{d}{dt}\Psi_{z_0(t)} \\ &= i\int dxdy\,\rho^{+z_0}(z)\frac{d}{dt}\sum_i \ln(z_i - z_0(t))\end{aligned} \tag{7.184}$$

と計算される。ここで ρ^{z_0} は状態の密度を表し，

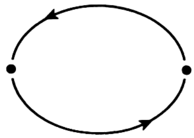


図 7.12 Berry 位相

$$\rho^{+z_0}(z) = \Psi^\dagger_{z_0} \sum_i \delta(z_i - z)\Psi_{z_0} \tag{7.185}$$

で与えられる。これより,

$$\gamma = \int \frac{d\gamma}{dt} = i\int dxdy\, \rho^{z_0}(z) \int dt \frac{-\dot{z}_0(t)}{z - z_0(t)} = -2\pi\langle n\rangle \tag{7.186}$$

となり，密度の値を使い

$$\gamma = -2\pi \frac{1}{3}\frac{\phi}{\phi_0} \tag{7.187}$$

と求まる。これよりこの渦が分数電荷 $e/3$ をもつことがわかる。

また複数の渦が異なる位置 z_0^1, z_0^2 にあり，互いのまわりにゆっくり移動するときの Berry 位相の変化から，渦の統計がわかる。この位相は

$$\pi\frac{1}{3} \tag{7.188}$$

と求まる。これよりこの渦は 1/3 の分数統計に従う。

$\nu = \frac{1}{2p\pm1}$ 以外の占有率で同様な関数を構成するハイラルキー構成法が知られている。この方法では渦がたくさんある状態で，渦の間での Laughlin 関数を構成するものである。

7.8 複合フェルミオンガス状態[8)]

占有率が 1/2 のごく近傍では等方的な圧縮性ガス状態が実現している。磁場中の二次元電子系では運動エネルギーが凍結しているので，この有限の圧縮率と等方的な性質をもつ状態は相互作用の効果で形成されていることになる。また占有率が 1/2 の近くの $\nu = \frac{p}{2p\pm1}$ では多くの分数量子ホール状態が発現している。これらの状態を系統的に理解するのに複合フェルミオン描像が有益である。この方法では，電子場に磁束が結合した複合粒子が動き回ると考える。そのため singular なゲージ変換を電子場に施す。singular なゲージ変換は通常の regular なゲージ変換とは異なり，場の物理的な性質を変えてしまう。性質を変えた場が系の力学を記述するとみなすと，比較的やさしい力学系が実現しているように見える。

特異ゲージ変換

電子場を $\psi(x)$ から $\widetilde{\psi}(x)$ へと一つの関数でゲージ変換する。

---

8)　J. K. Jain, Phys. Rev. Lett. **63**, 199(1989).

$$\psi(x) = e^{i\lambda(x)}\widetilde{\psi}(x) \tag{7.189}$$

このとき，微分項は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi(x) &= e^{i\lambda(x)}\left(ia_\mu(x) + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\widetilde{\psi}(x)\\ a_\mu(x) &= \frac{\partial}{\partial x_\mu}\lambda(x)\end{aligned} \tag{7.190}$$

となる。ここでの gradient 項のベクトル場 $a_\mu(x)$ の回転が 0 ではなく有限になるように，

$$\frac{\partial}{\partial x_1}a_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2}a_1(x) = B \tag{7.191}$$

とする。これは singular な関数でのみ可能である。この条件を満たす関数を求めるにあたり，さらに，

$$a_i = \epsilon_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x) \tag{7.192}$$

とおこう。すると，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2\phi(x) = -B \tag{7.193}$$

となる。一般の場合では

$$\frac{\partial}{\partial x_1}a_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2}a_1(x) = B(x) \tag{7.194}$$

となり，解は

$$a_i = \epsilon_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x) \tag{7.195}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int d^2x' \ln|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|B(x') \tag{7.196}$$

で与えられる。よってコーシー・リーマンの関係式より，

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int d^2x'\theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')|B(x') \tag{7.197}$$

$$\tan\theta = \frac{y - y'}{x - x'} \tag{7.198}$$

である。以上の singular ゲージ変換を量子ホール効果に応用しよう。

singular ゲージ変換した場に対するラグランジアンは

$$\begin{aligned}L = {}&\widetilde{\psi}^\dagger(x)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + A_0(x) + a_0(x)\right)\widetilde{\psi}(x)\\ &- \widetilde{\psi}^\dagger(x)\frac{(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}(x) + \boldsymbol{a}(x))^2}{2m}\widetilde{\psi}(x) + L_{\text{int}}\end{aligned} \tag{7.199}$$

と与えられる。以下ここではゲージ変換した場に対する理論を考える。ここで，ゲージ場 $a_\mu(x)$ が密度演算子から決まるようにする。そのため，通常の電磁場を表すベクトル場 $A_\mu(x)$ と 新たなゲージ場 $a_\mu(x)$，ならびにこれの運動項を含むラグランジアンを

$$L = \widetilde{\psi}^\dagger(x)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + A_0(x) + a_0(x)\right)\widetilde{\psi}(x) - \widetilde{\psi}^\dagger(x)\frac{(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}(x) + \boldsymbol{a}(x))^2}{2m}\widetilde{\psi}(x) + g\epsilon^{\mu\nu\rho}a_\mu(x)\partial_\nu a_\rho(x) + L_{\rm int} \tag{7.200}$$

とする。$a_\mu(x)$ の運動項は通常の電場や磁場の2乗ではなく，チャーン–サイモン項である。このため，$a_0(x)$ について変分して得られる方程式は通常のマックスウェル方程式とは異なり，

$$g\epsilon^{0ij}\partial_i a_j(x) = \rho(x) \tag{7.201}$$

$$\rho(x) = \widetilde{\psi}^\dagger(x)\widetilde{\psi}(x) \tag{7.202}$$

である。この解が

$$\boldsymbol{\nabla} \times (e\boldsymbol{A}(x) + \boldsymbol{a}) = 0 \tag{7.203}$$

を満たすとき，磁場が消失するように見える。有限の磁場の強さを与えられた電子系が，零磁場中での複合粒子系のように振る舞うわけである。

統計の転換

電子密度で決まる singular ゲージ変換した場は通常と異なる交換関係に従う。これを具体的に示そう。

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}(x) &= e^{-i\lambda(x)}\psi(x)\\ \lambda(x) &= \frac{1}{g}\int d^2x'\frac{1}{2\pi}\theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\rho(x')\end{aligned} \tag{7.204}$$

このとき場の積，

$$\widetilde{\psi}(x)\widetilde{\psi}(y), \qquad \widetilde{\psi}(x)\widetilde{\psi}^\dagger(y), \qquad \widetilde{\psi}^\dagger(x)\widetilde{\psi}^\dagger(y) \tag{7.205}$$

がどうなるだろうか? この積から場の交換関係がどうなるだろうか? 以下 $\widetilde{\psi}(x)$ と $\widetilde{\psi}^\dagger(y)$ の交換関係の計算を逐次追ってみる。

$$\begin{aligned}&\psi(x)\psi^\dagger(y) + \psi^\dagger(y)\psi(x)\\ &= e^{i\lambda(x)}[\widetilde{\psi}(x)\widetilde{\psi}^\dagger(y) + e^{-i\lambda(x)}\widetilde{\psi}^\dagger(y)e^{-i\lambda(y)}e^{i\lambda(x)}\widetilde{\psi}(x)e^{i\lambda(y)}]e^{-i\lambda(y)}\\ &= e^{i\lambda(x)}[\widetilde{\psi}(x)\widetilde{\psi}^\dagger(y) + e^{-i\lambda(x)}\widetilde{\psi}^\dagger(y)e^{i\lambda(x)}e^{-i\lambda(y)}\widetilde{\psi}(x)e^{i\lambda(y)}]e^{-i\lambda(y)}\end{aligned} \tag{7.206}$$

ここで

$$e^{-i\lambda(x)}\widetilde{\psi}^{\dagger}(y)e^{i\lambda(x)} = e^{\frac{i}{2g\pi}\theta(\vec{x}-\vec{y})}\widetilde{\psi}^{\dagger}(y) \tag{7.207}$$

$$e^{-i\lambda(y)}\widetilde{\psi}(x)e^{i\lambda(y)} = e^{\frac{i}{2g\pi}\theta(\vec{y}-\vec{x})}\widetilde{\psi}(x) \tag{7.208}$$

なることを使い，

$$\left[\widetilde{\psi}(x)\widetilde{\psi}^{\dagger}(y) + e^{-\frac{i}{2g\pi}(\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\theta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))}\widetilde{\psi}^{\dagger}(y)\widetilde{\psi}(x)\right] = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{7.209}$$

が得られる。さらに，

$$\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \theta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) = \pi \tag{7.210}$$

より，修正された交換関係

$$\left[\widetilde{\psi}(x)\widetilde{\psi}^{\dagger}(y) + e^{-\frac{i}{2g}}\widetilde{\psi}^{\dagger}(y)\widetilde{\psi}(x)\right] = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{7.211}$$

が得られる。この結果，$\frac{1}{2g\pi}$ が偶数の場合は交換関係は元のものと変わらないが，$\frac{1}{2g\pi}$ が奇数の場合はボース粒子の交換関係となる。$2g$ がいずれでもないときは中間の交換関係になる。

次に交換関係は元の電子間の交換関係と同じ，つまり $\frac{1}{2g\pi}$ が偶数の場合でしかも磁場が消失する場合を考察しよう。

$$g = 1/4\pi \tag{7.212}$$

とする。これと磁場と密度の関係式

$$geB = \rho \tag{7.213}$$

より，電子占有率は

$$\nu = 1/2 \tag{7.214}$$

である。だから電子占有率が 1/2 のときは複合電子にとって磁場が消失したように見える。だから複合電子のガス状態が実現するだろう。その質量は相互作用がなければ電子の質量と同じ大きさである。しかし相互作用があるので相互作用のために，質量は繰り込みの影響を受けるはずである。

次に電子占有率が

$$\nu = \frac{1}{2} + \delta \tag{7.215}$$

の場合を考察する。この場合には複合電子にとっての磁場は有限の値になる。その磁場の大きさは，

$$B' = B - B_0 \tag{7.216}$$

$$eB_0 = 4\pi\rho \tag{7.217}$$

そのため新たな整数量子ホール効果が実現する。この占有率は

$$\nu = \frac{p}{2p \pm 1} \tag{7.218}$$

である。pは自然数であり，pが1か2で$\nu = 1/3$の分数量子ホール状態を表す。pが無限大のとき$\nu = 1/2$の圧縮性ガス状態になる。これらの状態は有効磁場$B' = B - B_0$をもつのでエネルギーギャップもこの有効磁場に比例するはずである。しかし質量に対する相互作用からの効果がpにどのくらい依存するのかが大きな未解決の問題である。ゲージ変換で磁場がない系にmapされたように見えるわけであるが，電子はもともと磁場に比例する縮退度をもっていた。この縮退度はどのようになるのであろうか?

7.9 非等方的量子ホールガス[9)]

高次ランダウ準位で占有率が$l + \frac{1}{2}$ $(l \geq 2)$の近傍では特異な圧縮性状態が実現している。この状態は抵抗率が2方向で大きく異なる非等方的な圧縮性ガス状態である。空間的に一様に広がっているガス状態を調べるのに，空間の対称性を保つフォンノイマン表現は最適な表現である。この表現で非等方的な量子ホールガス状態の平均場理論を扱う。量子ホール系では運動エネルギーが連続的な値をとらず，とびとびの値に凍結している。これを反映して，運動量空間での平行移動に対して量子ホール系は不変である。一方，圧縮性ガス状態では，一体エネルギーは連続的な値をとっている。量子ホール系における連続的な一体エネルギーは相互作用で生成される。また，このとき対称性が破れている。圧縮性ガス状態は，相互作用により対称性が自発的に破れた量子多体状態である。

量子ホール力学系の代数

量子ホール力学系のハミルトニアンは，フォンノイマン表現における運動量を使う表示で，

$$H = H_0 + H_{\rm int} \tag{7.219}$$

$$H_0 = \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\rm BZ} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} E_l b_l^\dagger(\boldsymbol{p}) b_l(\boldsymbol{p}) \tag{7.220}$$

$$H_{\rm int} = \frac{1}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \rho(\boldsymbol{k}) V(\boldsymbol{k}) \rho(-\boldsymbol{k}) \tag{7.221}$$

9) A. A. Koulakov, M. M. Fogler, and B. I. Skhlovskii, Phys. Rev. Lett. **76**, 499(1996); R. Moessner and J. T. Chalker, Phys. Rev. **B54**, 5006(1996).

$$\rho(\boldsymbol{k}) = \sum_{l,l'=0}^{\infty} \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} b_l^\dagger(\boldsymbol{p}) b_{l'}(\boldsymbol{p} + a\widehat{\boldsymbol{k}}) f_{ll'}(\boldsymbol{k}) \times \exp\left[\frac{i}{4\pi} a\widehat{k}_x (2p_y + a\widehat{k}_y)\right] \tag{7.222}$$

と表される。格子系におけるフーリエ展開で導入されたので，運動量は有限領域で定義され磁場のために特殊な境界条件を満たしている。

量子ホール力学系は 2 方向での平行移動，回転，ならびに位相の変換に対して不変である。これらの変換の生成演算子である保存量は

$$Q_X = ar_s \sum_l \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} b_l^\dagger(\boldsymbol{p}) \left(i\frac{\partial}{\partial p_x} - \frac{p_y}{2\pi}\right) b_l(\boldsymbol{p}) \tag{7.223}$$

$$Q_Y = \frac{a}{r_s} \sum_l \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} b_l^\dagger(\boldsymbol{p}) \left(i\frac{\partial}{\partial p_y}\right) b_l(\boldsymbol{p}) \tag{7.224}$$

$$Q_J = \frac{1}{r_s} \sum_l \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} b_l^\dagger(\boldsymbol{p}) \times \left[l + \frac{1}{2} + \pi\left\{{r_s}^2\left(i\frac{\partial}{\partial p_x} - \frac{p_y}{2\pi}\right)^2 + r_s^{-2}\left(i\frac{\partial}{\partial p_y}\right)^2\right\}\right] b_l(\boldsymbol{p}) \tag{7.225}$$

$$Q = \sum_l \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} b_l^\dagger(\boldsymbol{p}) b_l(\boldsymbol{p}) \tag{7.226}$$

と表せる。これらはハミルトニアンと可換であるとともに，互いに代数，

$$[Q_X, Q_Y] = \frac{i}{eB} Q \tag{7.227}$$

$$[Q_J, Q_X] = iQ_Y \tag{7.228}$$

$$[Q_J, Q_Y] = -iQ_X \tag{7.229}$$

と

$$[Q_X, Q] = [Q_Y, Q] = [Q_J, Q] = 0 \tag{7.230}$$

を満たしている。平行移動の二つの生成子 Q_X と Q_Y は磁場の影響で非可換になっている。そのため，座標空間での平行移動を生成するとともに運動量空間での平行移動を生成する。これらは回転 Q_J に関してはベクトルとして変換する。

電荷密度が一定である相では，交換関係より Q_X と Q_Y の両方を対角形にする状態はない。どちらか一方の演算子の固有状態に他方の演算子をかけた状態は異なる固有値をもつ状態の重ね合わせた状態になる。だから，片方の演算子

の固有状態は他方の演算子が生成する対称性を破る状態であり，回転の対称性も同時に破っている。この状態について詳しく調べよう。

上記の4個の保存電荷はラグランジアンが場の連続変換に対して不変であるとき必ず存在するネーター電流密度，

$$j^{\mu}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Re}\,(\Psi^{\dagger} v_{\mu} \Psi) \tag{7.231}$$

$$j_X^{\mu}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Re}\,(\Psi^{\dagger} v_{\mu} X \Psi) - \frac{1}{eB}\delta_y^{\mu}\mathcal{L} \tag{7.232}$$

$$j_Y^{\mu}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Re}\,(\Psi^{\dagger} v_{\mu} Y \Psi) - \frac{1}{eB}\delta_x^{\mu}\mathcal{L} \tag{7.233}$$

$$j_J^{\mu}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Re}\,(\Psi^{\dagger} v_{\mu} J \Psi) + \epsilon_{0\mu i} x^i \mathcal{L} \tag{7.234}$$

から得られる。さらに電荷と電流密度の間には交換関係

$$[Q_X, j^{\mu}(\boldsymbol{x})] = -\frac{i}{eB}\partial_y j^{\mu}(\boldsymbol{x}) \tag{7.235}$$

$$[Q_Y, j^{\mu}(\boldsymbol{x})] = \frac{i}{eB}\partial_x j^{\mu}(\boldsymbol{x}) \tag{7.236}$$

$$[Q_X, j_X^{\mu}(\boldsymbol{x})] = -\frac{i}{eB}\partial_y j_X^{\mu}(\boldsymbol{x}) \tag{7.237}$$

$$[Q_Y, j_X^{\mu}(\boldsymbol{x})] = \frac{i}{eB}\partial_x j_X^{\mu}(\boldsymbol{x}) - \frac{i}{eB} j^{\mu}(\boldsymbol{x}) \tag{7.238}$$

$$[Q_X, j_Y^{\mu}(\boldsymbol{x})] = -\frac{i}{eB}\partial_y j_X^{\mu}(\boldsymbol{x}) + \frac{i}{eB} j^{\mu}(\boldsymbol{x}) \tag{7.239}$$

$$[Q_Y, j_Y^{\mu}(\boldsymbol{x})] = \frac{i}{eB}\partial_x j_Y^{\mu}(\boldsymbol{x}) \tag{7.240}$$

が成立する。これらの交換関係は相互作用がある系でもいつも成立し，磁場の強さをパラメーターとする。

運動量空間の平行移動のもとで場の演算子は

$$b_l(\boldsymbol{p}) \to b_l(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{K}) \tag{7.241}$$

と変換され，電荷密度は

$$\rho(\boldsymbol{k}) \to e^{i(\frac{a}{2\pi}k_x)K_y}\rho(\boldsymbol{k}) \tag{7.242}$$

と変換される。この変換のもとで，ハミルトニアンは明らかに不変に保たれる。これは，一体エネルギーがとびとびで連続な値をもたない量子ホール系の特徴的な性質である。逆に，一体エネルギーが連続な値をもった量子ホール相では，この対称性が自発的に破れている。

7.9.1 平均場解[10)]

一体エネルギーが連続な値をもつ場合，フェルミ面が形成される。フェルミ面がある状態では，上記の運動量空間での平行移動対称性は破れる。運動量を保存しフェルミ面をもつ状態で，運動量空間での平行移動対称性の破れを最小にするのは，p_y 方向の平行移動不変性を保ち，p_x 方向の不変性だけを破る状態である。これを考察する。

占有率 ν で，電子生成消滅演算子の期待値が，

$$\langle b_l^\dagger(\boldsymbol{p})b_l(\boldsymbol{p}')\rangle = \delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\theta[P_y+\nu\pi/2]\theta[\nu\pi/2-P_y] \tag{7.243}$$

であるとする。つまり，p_x 軸に平行なフェルミ面が

$$P_y = \pm\nu\pi/2 \tag{7.244}$$

にある。このとき平均場ハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_m = \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\epsilon_l(\boldsymbol{p})b_l^\dagger(\boldsymbol{p})b_l(\boldsymbol{p}) + E_l(0) \tag{7.245}$$

であり，一体エネルギーと占有率の関係は

$$\epsilon(\boldsymbol{p}) = -\int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p'}{(2\pi)^2}v_{HF}(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})\theta[\mu_0(\nu)-\epsilon(\boldsymbol{p}')] \tag{7.246}$$

$$\nu = \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p'}{(2\pi)^2}\theta[\mu_0(\nu)-\epsilon(\boldsymbol{p}')] \tag{7.247}$$

である。クーロンポテンシャルと平均場からハートリー・フォックポテンシャルが得られ，

$$\begin{aligned} v_{HF}(\boldsymbol{p}) &= \sum_{\boldsymbol{N}}\{v_l(2\pi\boldsymbol{N})e^{i\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{N}} - v_l(2\pi\boldsymbol{N}-\boldsymbol{p})\} \\ v_l(k) &= e^{-\frac{k^2}{4\pi}}\left[L_l\left(\frac{k^2}{4\pi}\right)\right]^2 V(k) \end{aligned} \tag{7.248}$$

となっている。この平均場ハミルトニアンから占有率 ν の状態が上の電子演算子の期待値に一致するとき，自己無撞着な平均場解となっている。これを求めるには複雑な積分を行う必要があり，数値的な方法が使われる。その結果解が求まり，同時に一体エネルギーや電荷密度等がわかる。一体エネルギーは図 7.13 で与えられ，電荷密度は図 7.14 で与えられる。電流密度や電荷密度の空間分布に関しては，関係式，

10) K. Ishikawa, T. Aoyama, Y. Ishizuka, and N. Maeda, Int. Mod. Phys. **B17**, 4765 (2003).

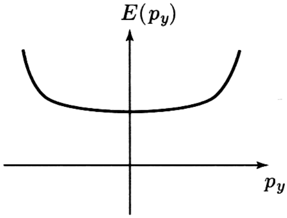


図 7.13 エネルギー

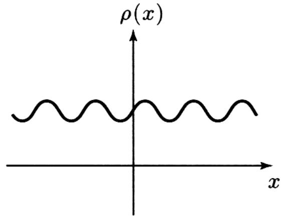


図 7.14 密度の空間変化

$$\langle\rho(\boldsymbol{x})\rangle = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \langle b_l^\dagger(\boldsymbol{p}) b_{l'}(\boldsymbol{p}+a\widehat{\boldsymbol{k}})\rangle \langle f_l | e^{-i(k_x\xi+k_y\eta)} | f_l\rangle \times e^{-ia/4\pi \widehat{k}_x(2p_y+a\widehat{k}_y)} \tag{7.249}$$

$$\langle\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})\rangle = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \int_{\mathrm{BZ}} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \langle b_l^\dagger(\boldsymbol{p}) b_{l}(\boldsymbol{p}+a\widehat{\boldsymbol{k}})\rangle \left\langle f_l \left| \frac{1}{2}\boldsymbol{v}, e^{-i(k_x\xi+k_y\eta)} \right| f_l\right\rangle \times e^{-ia/4\pi \widehat{k}_x(2p_y+a\widehat{k}_y)} \tag{7.250}$$

で計算する。この関係式で興味深いことは，右辺の最後にある位相因子に起因して，密度が一様な方向が運動量空間と座標空間で直交していることである。この位相因子の起源はもともと磁場に起源をもつ座標の非可換性にあり，よって運動量空間と座標空間の直交性は磁場から引き起こされている。これは電場と直交する電流が流れるホール効果そのものを示している。

7.9.2 南部・ゴールドストーン粒子，プラズモンと高次補正効果等

対称性が自発的に破れるとき，零エネルギー励起モードが必ず現れる。零エネルギー励起モードのスペクトルは系の力学に依存し，計算で求めることは一般的にはやさしくない。ここでは近似を使い，非等方的ホールガス状態の零エネルギー励起モードのスペクトルや，その物理効果を調べる。

平均場近似での全ハミルトニアンは，

$$\begin{aligned} H &= H_{HF} + H_{\mathrm{int}} - H_{HF} \\ &= H_{HF} + \frac{1}{2}\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} :\rho(\boldsymbol{k})V(k)\rho(-\boldsymbol{k}): \end{aligned} \tag{7.251}$$

$$H_{HF} = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \epsilon_l(\boldsymbol{p}) b_l^\dagger(\boldsymbol{p}) b_l(\boldsymbol{p}) \tag{7.252}$$

と表せる。ここで $:O:$ は演算子 O の normal ordered 積を意味する記号であり，電子の生成消滅演算子の積はすべて生成演算子が先で後に消滅演算子がく

る順番に並べたものである。このとき真空期待値は

$$\langle 0| : O : |0\rangle = 0 \tag{7.253}$$

と 0 になる。

摂動論の高次効果の具体的な計算は，零磁場中での摂動計算や QED における摂動計算と同様に行う。今の場合，0 次のハミルトニアン H_{HF} が，もともと相互作用により引き起こされた項であるので，結合定数に依存した大きさをもっている。

クーロン四体相互作用の高次補正や複素誘電率が，電流相関関数

$$\Pi_{\mu\nu}(\boldsymbol{q}) = \int dx \langle 0|T(j_\mu(x) j_\nu(0))|0\rangle \tag{7.254}$$

の摂動計算を通して求まる。また

プラズモン励起エネルギーや南部・ゴールドストーン零エネルギー励起が変分法で計算される。式 (7.223) などの代数関係より，密度演算子が対称性の破れに伴う南部・ゴールドストーン零エネルギー励起と結合する。

問 題 7

7.1 内積の式 (7.42) を示せ。

7.2 二重極モーメントがあるときの Ward–高橋恒等式 (7.84) を示せ。

7.3 式 (7.91) と (7.84) を示せ。

7.4 式 (7.103) を証明せよ。

7.5 コーンの定理は，強結合電子系でも成立するか?

8章　非可換ゲージ理論

電荷や電流間の現象は，電磁場を通して普遍的に起きている。非可換群に拡張された電荷や電流間の普遍的な現象は，非可換ゲージ場に起因している。本章で非可換ゲージ理論の量子論を扱う。自然界にある 4 種の基本相互作用のうちで，電磁気相互作用，弱い相互作用と強い相互作用が非可換ゲージ理論で表される。さらに，電磁気相互作用と弱い相互作用は電弱理論として $SU(2) \times U(1)$ ゲージ理論で統一されている。$SU(2) \times U(1)$ 群の一部は自発的に破れ，対応するゲージ場は重い質量をもつ。破れない部分群が一部残り，対応するゲージ場は零質量の光子を表す。一方，強い相互作用は $SU(3)$ ゲージ理論で表せる。強い相互作用では対称性が破れない。そのため，すべてのゲージ場は零質量のままであり，赤外発散をもつ。

8.1　非可換電荷を源とするゲージ場

電磁気学で電荷密度 $\rho(x)$ を源として電場 $\boldsymbol{E}(x)$ がつくられている関係は数学的に

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(x) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(x) \tag{8.1}$$

と表される。この電場の下に他の電荷 q がおかれると，電荷 q に力が働く。この電荷に働く力は，

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{8.2}$$

であり電荷に比例し電場に比例する。力の方向は正符号の電荷では電場と同じ方向であり，負電荷では電場と逆向きである。

電流密度と磁場 (磁束密度) との関係式は,

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(x) = \mu_0 \boldsymbol{j}(x) \tag{8.3}$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} \tag{8.4}$$

であり，電流ベクトルが磁束密度ベクトルの回転の源となる。電場や磁束密度は電荷密度や電流密度だけで決まり物質によらない普遍的な性質をもっている。

物質場が量子化されたとき，物質が担う電荷密度は物質場の位相をずらし交換関係

$$[\rho(x), \rho(y)]\delta(x_0 - y_0) = 0 \tag{8.5}$$

に従う。よって電荷密度を積分した電荷

$$q = \int d\boldsymbol{x}\, \rho(x_0, \boldsymbol{x}) \tag{8.6}$$

は交換する可換量であり

$$[q, q] = 0 \tag{8.7}$$

に従う。これは電荷が可換群である $U(1)$ 群の交換関係に従うことを表す。そのため電磁気学は可換ゲージ理論とよばれる。

ここで，近接作用論を電磁気学から非可換ゲージ場の理論へと拡張しよう。電荷が複数個あり，それらが互いに高いランクの群の変換で互いに移り変わるものとする。このとき保存電荷は $U(1)$ 群の電荷から拡張されて，高いランクの非可換な群の電荷となる。電流も非可換群に拡張される。非可換群の電荷や電流を源とする近接場の従う方程式が，局所的な座標変換に対する不変性から決まる。その結果近接場の性質が明らかになる。電磁場は電荷をもたないが，非可換ゲージ場は非可換電荷をもつ。そのため，非可換ゲージ理論では，非線形性が強く，相互作用の効果が極めて大きい。

マックスウェル方程式を拡張して，非可換ゲージ場の方程式を導く。簡単な非可換群の例として，$SO(3)$ 群を考察する。他の群への拡張は難しくなくほぼ自明である。

前の章で見たように, 3 個の物質場 $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ を混合する連続変換で不変な場の理論では, 独立な 3 個の変換に対応する保存電荷密度 $\rho^a(x)$ $(a = 1, 2, 3)$ と保存電流密度 $j_i^a(x)$ $(a = 1, 2, 3)$ が存在し，連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^a(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} j_i^a(x) = 0 \tag{8.8}$$

を満たす。保存する電荷密度 $\rho^a(x)$ を空間積分した保存電荷

$$Q^a = \int d^3x\, \rho^a(x) \tag{8.9}$$

は ϵ^{abc} を群の構造定数とする $SO(3)$ 群のリー代数，

$$[Q^a, Q^b] = \epsilon^{abc} Q^c \tag{8.10}$$

を満たす。群の性質をもつ電荷に作用し，電荷を源とする近接作用的な場 (ゲージ場) を $\boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{x}, t)$ としよう。この場所におかれた電荷に働く力は，電荷と場の積に比例する普遍的な関係式

$$\boldsymbol{F} = \sum_a q^a \boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{x}, t) \tag{8.11}$$

で表される。力はもともと電荷をもつ粒子の加速度運動の原因となるものであり，内部空間には無関係な内部空間でのスカラー量である。そのために，$\boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{x}, t)$ も電荷 Q_a と同じ変換性をもつ必要がある。つまり，場 $\boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{x}, t)$ の発散はリー代数をなす電荷密度であり，$\boldsymbol{B}^a(\boldsymbol{x}, t)$ の回転はリー代数をなす電流密度である。そのため，拡張された電場や磁場は内部自由度をもち，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{x}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho^a(\boldsymbol{x}, t) \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}^a(\boldsymbol{x}, t) &= \pm \mu_0 \boldsymbol{j}^a(\boldsymbol{x}, t) \end{aligned} \tag{8.12}$$

に従うと仮定するのがもっともらしいだろう。さらにこの関係式が普遍的に成立するためには，$R^t R = 1$ を満たす 3×3 行列による変換に対して右辺の源が，

$$j_\mu{}^a(\boldsymbol{x}, t) \to R^{ab} j_\mu{}^b(\boldsymbol{x}, t) \tag{8.13}$$

と共変的に変換され，非可換な電場や磁場も変換群に対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{x}, t) &\to R^{ab} \boldsymbol{E}^b(\boldsymbol{x}, t) \\ \boldsymbol{B}^a(\boldsymbol{x}, t) &\to R^{ab} \boldsymbol{B}^b(\boldsymbol{x}, t) \end{aligned} \tag{8.14}$$

と共変的に変化する物理量である必要がある。

ここでさらに，場が近接的な相互作用を担う局所的な性質を保つことを要請しよう。これは近接場が満たすべき強い条件である。このとき，電荷や場は座標ごとに独立に行う局所的変換 $R(x)$ に対しても，

$$j_\mu{}^a(\boldsymbol{x}, t) \to R^{ab}(x) j_\mu{}^b(\boldsymbol{x}, t) \tag{8.15}$$

$$\boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{x}, t) \to R^{ab}(x) \boldsymbol{E}^b(\boldsymbol{x}, t) \tag{8.16}$$

$$\boldsymbol{B}^a(\boldsymbol{x}, t) \to R^{ab}(x) \boldsymbol{B}^b(\boldsymbol{x}, t) \tag{8.17}$$

と共変的に変化する。しかし，この変換に対して式 (8.12) は $R(x)$ の微分項のため不変ではない。場の決定方程式の共変性を保つためには，場の方程式を式 (8.12) から変更する必要がある。これを，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \delta_{ab} + \epsilon^{abc} A_i^b \right) E_i^c(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho^a(\boldsymbol{x}, t) \tag{8.18}$$

$$\epsilon_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\delta_{ab}+\epsilon^{abc}A_j^b(\boldsymbol{x},t)\right)B_k^c(\boldsymbol{x},t)=\mu_0 j_i^a(\boldsymbol{x},t) \tag{8.19}$$

と変更し，ベクトル場 $A_\mu^a(x)$ が変換に対して，

$$A_\mu^b(x)\to R^{ab}(x)A_\mu^b(x)+\epsilon^{abc}R^{bd}(x)\frac{\partial}{\partial x_\mu}R^{cd}(x) \tag{8.20}$$

と変換されるゲージ場であるとすれば局所的な不変性が保たれる。右辺第 2 項は電磁ベクトルポテンシャルの受ける変換を非可換群に拡張したものである。ここで，3 行 3 列の直交行列が満たす恒等式，

$$\sum \epsilon^{abc}R^{aa'}R^{bb'}R^{cc'}=\epsilon^{a'b'c'} \tag{8.21}$$

を使う。またゲージ場から

$$F_{\mu\nu}^a=\frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\nu^a(x)-\frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\mu^a(x)+\epsilon^{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x) \tag{8.22}$$

と定義される 2 階テンソルは共変的に

$$F_{\mu\nu}^a(x)\to R^{ab}(x)F_{\mu\nu}^b(x) \tag{8.23}$$

と変換される。そのため，この 2 階テンソルは非可換ゲージ理論における電場や磁場の役割を担うものである。この 2 階テンソルに対する方程式は，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta_{ac}+\epsilon^{abc}A_\mu^b(x)\right)F_{\mu\nu}^c=j_\mu^a(x) \tag{8.24}$$

とまとめられる。

非可換ベクトル場を行列で表すと見通しがよいことが多い。行列，

$$\widehat{A}_\mu(x)_{ab}=\epsilon^{abc}A_\mu^c(x) \tag{8.25}$$

を使うとゲージ変換は，

$$\widehat{A}_\mu(x)\to R(x)^{-1}(\widehat{A}_\mu(x)+\partial_\mu)R(x) \tag{8.26}$$

となる。2 階テンソル，

$$\widehat{F}_{\mu\nu}=[\partial_\mu+\widehat{A}_\mu(x),\partial_\nu+\widehat{A}_\nu(x)] \tag{8.27}$$

の変換は，

$$\widehat{F}_{\mu\nu}\to R(x)^{-1}\widehat{F}_{\mu\nu}R(x) \tag{8.28}$$

である。そのため場が従う方程式，

$$(\partial^\mu+\widehat{A}_\mu)\widehat{F}_{\mu\nu}(x)=\widehat{j}_\nu(x) \tag{8.29}$$

は共変的に変換される。

電荷が加速度運動すると電磁波を放射することに対応して，非可換電荷をもつ粒子が加速度運動するとゲージ場を放射する。放射を求めるには非可換ゲー

ジ場の基本的方程式 (8.18), (8.19) を解くことが必要である。ゲージ場自身が非可換な電荷をもつことが，非可換ゲージ理論の特徴である。そのため，ゲージ場の波動方程式は，物質からの電荷密度や電流密度がないときでも非線形な方程式である。だから，解は簡単には求まらない。例外としてユークリッド的な時空の場合の非線形方程式の非常に特殊な解としてインスタントン解がわかっている。また，方程式を結合定数で展開すれば，最低次では電磁気学の波動方程式と同等な波動方程式となっている。結合定数について摂動展開を使い求まる解は原理的には同様な性質をもつ。

8.2 非可換ゲージ場の正準形式

非可換ゲージ理論

非可換ゲージ理論の正準形式を次に調べよう。ラグランジアン密度は，

$$L = -\frac{1}{4}{F^a_{\mu\nu}}^2 + j^a_\mu A^{\mu a} \tag{8.30}$$

と書ける。ここで $j^a_\mu(x)$ は物質が運ぶ電流であり，

$$\{j^a_0(x), j^b_0(y)\}_{PB} = f^{abc} j^c_0(y)\delta(x-y) \tag{8.31}$$

を満たし，また

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^b_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{8.32}$$

である。このラグランジアン密度から，ゲージ理論の波動方程式がオイラー・ラグランジュの方程式，

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu}L - \partial_\nu \frac{\delta}{\delta \partial_\nu A_\mu}L = 0 \tag{8.33}$$

として得られる。ラグランジアンを A_μ で微分した項は，

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu}L = j^a_\mu + g f^{abc} A^b_\nu F^c_{\mu\nu} \tag{8.34}$$

となる。そのため，式 (8.33) の方程式は，

$$\partial_\mu F^a_{\mu\nu}(x) + f^{abc} A^b_\mu F^c_{\mu\nu} = j^a_\mu \tag{8.35}$$

となり，結果は式 (8.18), (8.19) と一致する。

次に場に共役な正準運動量を求めよう。式 (8.30) からベクトル場 $A_\mu(\boldsymbol{x})$ に共役な運動量 $\Pi_0(x), \Pi_i(x)$ は，

$$\Pi_0(x) = \frac{\delta}{\delta \partial_t A_0(x)}L = 0 \tag{8.36}$$

$$\Pi_i(x) = \frac{\delta}{\delta \partial_t A_i(x)} L = F_{i0} \tag{8.37}$$

となる。ところで，$A_0(x)$ の時間微分は L に含まれていない。そのため，$A_0(x)$ の共役運動量は恒等的に 0 になる。つまり，これは力学系がもつ拘束条件になっている。さらに，$\partial_t A_i(x)$ を $\Pi_i(x)$ で表してハミルトニアンを求める。ハミルトニアンは，

$$\begin{aligned} H &= \int d\boldsymbol{x} \left(\Pi_0(x) \frac{\partial}{\partial t} A_0(x) + \Pi_j(x) \frac{\partial}{\partial t} A_j(x) \right) - L \\ &= \int d\boldsymbol{x} \left(\frac{1}{2} \Pi_j(x)^2 + \frac{1}{2} {F_{ij}}^2 + A_0(\partial_i \Pi_i - j_0^a) \right) \end{aligned} \tag{8.38}$$

である。そのため，この拘束条件の時間微分は，

$$\frac{\delta}{\delta A_0(x)} H = \partial_i \Pi_i^a(x) + A_i^b \Pi_i^a(x) - j_0^a(x) \tag{8.39}$$

である。拘束条件は時刻に無関係にいつも成立する必要があるので

$$\partial_i \Pi_i^a(x) + f^{abc} A_i^b \Pi_i^a(x) - j_0^a(x) = 0 \tag{8.40}$$

が成立する。つまり式 (8.36) 以外に新たな拘束条件が出る。さらに式 (8.40) の時間微分から，新しい拘束条件がつけ加わることもあるが，今の場合この段階で終了し，拘束条件は式 (8.36) と式 (8.40)，

$$\begin{aligned} \phi_0^a(x) &= \Pi_0^a(x) = 0 \\ \phi_1^a(x) &= \partial_i \Pi_i^a(x) + f^{abc} A_i^b \Pi_i^a(x) - j_0^a(x) = 0 \end{aligned} \tag{8.41}$$

で尽きる。この拘束条件は閉じた代数，

$$\begin{aligned} [\phi_0^a(x), \phi_0^b(x)] &= 0 \\ [\phi_1^a(x), \phi_1^b(y)] &= f^{abc} \phi_1^c(x) \delta^{(3)}(x-y) \end{aligned} \tag{8.42}$$

を満たす。拘束条件を取り入れたハミルトニアンは，ラグランジュの未定定数法から，

$$H_{\text{total}} = H + \int d^3x (\lambda_0(x)\phi_0(x) + \lambda_1(x)\phi_1(x)) \tag{8.43}$$

で与えられる。未定定数 $\lambda_i(x)$ は空間や時間座標の関数である。拘束条件が閉じた代数をなすので，ゲージを固定する条件を課す。この結果，拘束条件に関与する自由度が系のダイナミックスから分離され，系のダイナミックスは実自由度だけから表されるようになる。いまゲージ固定を

$$\xi_0^a = A_0^a = 0 \tag{8.44}$$

$$\xi_1^a = \partial_i A_i^a(x) = 0 \tag{8.45}$$

とした場合の未定係数を求めよう。ゲージ固定条件を時間微分して，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\partial_i A_i^a(x) &= \{\partial_i A_i^a(x), H_{\text{total}}\}_{PB} \\ &= ((\partial_i)^2 + A_i\partial_i)\lambda_1(x) + (\partial_i + A_i)P_i \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8.46}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A_0^a(x) &= \{A_0^a(x), H_{\text{total}}\}_{PB} \\ &= \lambda_0(x) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8.47}$$

が得られる。これを解いて未定係数 $\lambda_0(x)$, $\lambda_1(x)$ が決まる。つまりゲージ固定を行うことと，未定係数を決めることが同等である。

8.3 経路積分による量子化

ゲージ場の理論は拘束条件をもつ力学系であるので，量子化に際しては拘束条件をいかに取り扱うかが重要なポイントである。様々な方法があるが，ここでは Dirac や Faddeev による拘束条件の扱い法に基づいて議論を進める。この方法では，正準変換により拘束条件が簡単になるように新たな正準変数を選ぶ。ゲージ場の理論では，拘束条件は閉じた代数をなし可換ではない。ところで，独立な正準運動量は可換である。このため，拘束条件を独立な正準運動量とみなすことはできない。そのかわり，拘束条件に対応して固定するゲージ条件を独立な正準運動量にみなすことはできる。そのためには，ゲージ固定条件を互いに可換であるように決めておく必要がある。すると，拘束条件が可換ではなく閉じた代数をなしているゲージ場の理論で，Dirac や Faddeev による拘束条件の扱い法が適用できる。正準形式の古典論で拘束条件の取り扱い法がわかったならば，経路積分を使うことによる量子論への移行はほとんど自明である。

以下まず簡単な例でアイデアを把握しよう。正準変数が (p_i, q_i) $(i = 1, l)$，ハミルトニアンが $H(p, q)$ である系は，経路積分，

$$\int \Pi_i dp_i dq_i e^{i\int_{t_1}^{t_2} dt(\dot{p}_i q_i - H)} \tag{8.48}$$

で波動関数の時間発展を決める変換関数が表される。系に独立な正準変数 (P_L, Q_L) が加わっても，これらが拘束条件，

$$P_L = 0 \tag{8.49}$$

$$Q_L = f_L(p_i, q_i) \tag{8.50}$$

を満たしているとき，この変数で表される自由度は凍結されていて真の自由度

ではない。このとき，経路積分は

$$\int \Pi_i dp_i dq_i dP_L dQ_L \delta(P_L)\delta(Q_L - f_L(p,q)) e^{i\int_{t_1}^{t_2} dt(\dot{p}_i q_i + \dot{P}_L Q_L - \widetilde{H}(P_L,Q_L,p,q))} \tag{8.51}$$

$$\widetilde{H}(P_L = 0, Q_L = f_L(p,q), p, q) = H(p,q) \tag{8.52}$$

となる。この経路積分で変数 (P_L, Q_L) を先に積分すると前の式に一致する。だからこの系の力学的性質は前のものと等価である。また束縛条件が式 (8.50) のかわりに Q_L について陰関数の形で

$$P_L = 0 \tag{8.53}$$

$$g(Q_L, p_i, q_i) = 0 \tag{8.54}$$

と与えられる場合がある。この陰関数の条件を Q_L について解いて

$$P_L = 0 \tag{8.55}$$

$$Q_L - f_L(p_i, q_i) = 0 \tag{8.56}$$

となる場合には，デルタ関数に関する恒等式

$$\begin{aligned}\delta(P_L)\delta(Q_L - f_L(p,q)) &= \delta(P_L)\delta(g(Q_L,p,q))g'(Q_L,P_L,p,q)\\ &= \delta(P_L)\delta(g(Q_L,p,q))\{P_L, g(Q_L,P_L,p,q)\}_{P.B.}\end{aligned} \tag{8.57}$$

が使える。これを代入して経路積分は

$$\int \Pi_i dp_i dq_i dP_L dQ_L \delta(P_L)\delta(g(Q_L,p,q))\{P_L, g(Q_L,P_L,p,q)\}_{P.B.} e^{i\int_{t_1}^{t_2} dt(\dot{p}_i q_i - H)}$$

と表せる。このようにして，拘束条件を満たす変数の空間が他の変数の空間から分離できる場合には，量子化された理論の経路積分は容易に求めることができる。

ゲージ場の理論は拘束条件をもつ理論である。非可換ゲージ理論における拘束条件を満たす空間と，拘束条件に関与しない空間がきれいに分離されているわけではない。このため，拘束条件を満たす空間を全空間から分離していかに構成するかは自明でない。Dirac や Faddeev による拘束条件の扱い法では，正準変換を活用する。正準変換により，上の例における運動量 P_L をゲージ固定条件に，$g(Q_L,p,q)$ を拘束条件に対応させるようにする。それとともに，上の例とは筋道を逆にたどることで，ゲージ場の理論の経路積分表示が得られる。

8.4　Faddeev と Popov の Ghost

非可換ゲージ場の理論はラグランジアン (8.30) で記述される。このラグランジアンより，ハミルトニアンと拘束条件 (8.41) が自動的に決まる。拘束条件は閉じた代数 (8.42) を形成するので，さらにゲージ固定条件 (8.44) を課す。ゲージ固定条件は互いに可換であり，また拘束条件とのポアッソン括弧がつくる行列式は 0 ではないようにとる。すなわち，

$$\{\xi_i^a, \xi_j^b\} = 0 \tag{8.58}$$

$$\det\{\xi_i^a, \phi_j^b\} \neq 0 \tag{8.59}$$

を満たすとする。

さて，ある正準変換でゲージ固定条件 ξ_i^a が新たな正準運動量 $P_{L'}$ になったとしよう。このとき拘束条件 $g_{L'}(Q,p,q)$ は陰関数としての座標 $Q_{L'}$ を決める条件になっている。だからこれらの変数 $P_{L'}, Q_{L'}$ に対する条件

$$P_{L'} = 0 \tag{8.60}$$

$$Q_{L'} = f_{L'}(p,q) \tag{8.61}$$

は経路積分ではデルタ関数

$$\Pi_{L'}\delta(P_{L'})\delta(Q_{L'} - f_{L'}(p,q)) \tag{8.62}$$

で表せる。さらにデルタ関数をもとの拘束条件を使う陰関数で表すと，

$$\Pi_{L'}\delta(\xi_i^a(x))\delta(\phi_j^b(y))\det\{\xi_i^a(x), \phi_j^b(y)\} \tag{8.63}$$

となる。上の式で，右辺の最後の項は変数変換のヤコビアンに起因するが，この項のため，拘束条件やゲージ固定条件が正準変数に関する線形の関係式であることを保証している。拘束条件がもとの変数に関して線形でない複雑な関数となる場合でも，変換された変数では線形な条件式となっていることがわかる。今の場合，拘束条件とゲージ条件とのポアッソン括弧は

$$\{\xi_i^a(x), \phi_j^b(y)\} = \Delta_{ij}^{ab}(x)\delta(x-y) \tag{8.64}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{ij}^{ab}(x) &= \delta^{ab}, \quad i = j = 0\\ &= 0, \quad i \neq j\\ &= ((\partial_i)^2 + A_i(x)\partial_i)\delta(x-y), \quad i = j = 1\end{aligned} \tag{8.65}$$

となる。このポアッソン括弧から決まる行列式を加えて経路積分が求まる。ところで，この行列式は無限次元のものであり，計算を見通しよく行うには，わかりやすく表現するのがよい。このため，フェルミ場の性質である反可換な性

質をもつスカラー場 (Faddeev-Popov 場) を導入して，行列式を新たな場による経路積分表示で表しておく。このため，反可換なスカラー場の積分の公式

$$\det\{\xi_i^a(x), \phi_j^b(y)\} = \int d\zeta^a(x)^\dagger d\zeta^a(x) e^{\int dx \zeta^a(x)^\dagger \Delta \zeta^b(x)} \tag{8.66}$$

を使う。このスカラー場はもともとラグランジアンには含まれていなかったが，場の変換のヤコビアンを表すものであり，無矛盾にゲージ固定による余分な自由度を消去する役割を担っている。ゲージ不変な形で固定を行う役割を担っていることもわかる。

以上をまとめると，量子化した非可換ゲージ理論の経路積分は

$$\begin{aligned}&\int \Pi dA_i^a(x) dA_0^a(x) dP_i^a(x) dP_0^a(x) \\ &\quad \times \delta(\phi_1)\delta(\phi_2)\delta(\xi_1)\delta(\xi_2) \det\{\phi_i, \xi_j\}_{PB} e^{iS}\end{aligned} \tag{8.67}$$

で与えられる。また反可換スカラー場を使う表示では，

$$\begin{aligned}&\int \Pi dA_i^a(x) dA_0^a(x) dP_i^a(x) dP_0^a(x) d\zeta^a(x) d\zeta^{a\dagger}(x) \\ &\quad \times \delta(\phi_1)\delta(\phi_2)\delta(\xi_1)\delta(\xi_2) e^{i(S+A)}\end{aligned} \tag{8.68}$$

$$A = -i \int dx\, \zeta^{a\dagger}(x) \Delta \zeta^a(x) \tag{8.69}$$

となる。運動量 P_0^a, P_i^a での積分は簡単に実行できる。結果はラグランジアンを使う表示

$$\int \Pi dA_i^a(x) dA_0^a(x) d\zeta^a(x) d\zeta^{a\dagger}(x) \delta(\phi_1)\delta(\phi_2) e^{i(S+A)} \tag{8.70}$$

に一致する。

ここまでは正準形式にのっとる経路積分表示からゲージ理論の経路積分を得た。次に，ラグランジアン形式の経路積分におけるゲージ固定を調べ，同じ結果が得られることを見る。ラグランジアン形式での経路積分表示は

$$\int \Pi dA_\mu(x) e^{iS} \tag{8.71}$$

である。ゲージ理論では場のゲージ変換

$$\begin{aligned}A_\mu &\to A_\mu^\Omega(x) \\ &= \Omega(x) A_\mu (\Omega(x))^{-1} + \Omega(x)\partial_\mu \Omega(x)\end{aligned} \tag{8.72}$$

に対して作用が

$$S \to S^\Omega = S \tag{8.73}$$

と不変である。上の経路積分で，被積分関数がゲージ不変であることから，ゲージ場のある積分領域とこれをゲージ変換した新たな領域とは同じ寄与を与える。

そのため，経路積分にはゲージ変換の自由度の体積がかかる。この体積は，発散するので取り除くことが望まれる。ゲージ固定してこの発散を取り除こう。そのため，経路積分にゲージ固定の条件

$$\delta(F[A_\mu]) \tag{8.74}$$

を付加する。これがゲージ固定であるので，

$$F[A_\mu^\Omega] \neq F[A_\mu] \tag{8.75}$$

を満たしていて，ゲージ自由度の積分に関する恒等式

$$\int \Pi d\Omega(x)\delta(F[A_\mu^\Omega])\frac{\partial F[A_\mu^\Omega]}{\partial\Omega} = 1 \tag{8.76}$$

が成立している。これより，経路積分表示が，

$$\begin{aligned}
&\int \Pi dA_\mu(x)e^{iS} \\
&\quad = \int \Pi dA_\mu(x)\Pi d\Omega(x)\delta(F[A_\mu^\Omega])\frac{\partial F[A_\mu^\Omega]}{\partial\Omega}e^{iS} \\
&\quad = \int \Pi dB_\mu(x)\Pi d\Omega(x)\delta(F[B_\mu])\frac{\partial F[A_\mu^\Omega]}{\partial\Omega}\bigg|_{A_\mu^\Omega=B_\mu} e^{iS[B_{[\mu]}]}
\end{aligned} \tag{8.77}$$

と求まる。さらに変形して，この表示は

$$\begin{aligned}
&\int \Pi d\Omega \int \Pi dA_\mu(x)\delta(F[A_\mu^\Omega])\frac{\partial F[A_\mu^\Omega]}{\partial\Omega}e^{iS} \\
&\quad = \left(\int \Pi d\Omega \int \Pi dB_\mu(x)\delta(F[B_\mu])\right)\frac{\partial F[A_\mu^\Omega]}{\partial\Omega}\bigg|_{A_\mu^\Omega=B_\mu} e^{iS[B_{[\mu]}]}
\end{aligned} \tag{8.78}$$

と表せる。ここで

$$\frac{\partial F[A_\mu^\Omega]}{\partial\Omega}\bigg|_{A_\mu^\Omega=B_\mu} \tag{8.79}$$

が B_μ だけによって決まることを使い，ゲージ固定した経路積分が

$$\int \Pi dB_\mu(x)\delta(F[B_\mu])\frac{\partial F[A_\mu^\Omega]}{\partial\Omega}\bigg|_{A_\mu^\Omega=B_\mu} e^{iS[B_{[\mu]}]} \tag{8.80}$$

と求まる。積分変数を $A_\mu(x)$ で表すと，これは

$$\int \Pi dA_\mu(x)\delta(F[A_\mu])\frac{\partial F[A_\mu^\Omega]}{\partial\Omega}\bigg|_{A_\mu^\Omega=B_\mu} e^{iS[A_{[\mu]}]} \tag{8.81}$$

となる。

ゲージ固定の例として，

$$F[A_\mu] = \partial_\mu A_\mu^a = 0 \tag{8.82}$$

とすると

$$\left.\frac{\partial F[A_\mu^\Omega]}{\partial \Omega}\right|_{A_\mu^\Omega = B_\mu} = \partial_\mu D_\mu \tag{8.83}$$

となり，正準形式に即して得られた結果に一致する。さらに計算をしやすくするために，デルタ関数で表されている拘束条件を指数関数で表すことが多い。まず，ゲージ固定条件を c 数関数 $\alpha(x)$ を使い，

$$F[A_\mu] = \alpha(x) \tag{8.84}$$

とする。ゲージ固定条件をこのように変えても，経路積分はそのままで何も変わらない。そのためさらに $\alpha(x)$ について重み，

$$e^{-\int dx \frac{1}{2\alpha}(\alpha(x))^2} \tag{8.85}$$

をつけて和をとり，

$$\int d\alpha(x)\delta(F(x) - \alpha(x))e^{-\int dx \frac{1}{2\alpha}(\alpha(x))^2} \tag{8.86}$$

を挿入する。結果は作用にゲージ固定項が加わる表示，

$$\int \Pi dA_\mu(x) \left.\frac{\partial F[A_\mu^\Omega]}{\partial \Omega}\right|_{A_\mu^\Omega = B_\mu} e^{iS[A_{[}\mu]] + iS_{gf}} \tag{8.87}$$

$$S_{gf} = \int dx\, \frac{1}{2\alpha}(F[A_\mu])^2 \tag{8.88}$$

となる。最後に Faddeev–Popov スカラー場を使い，すべて作用積分の形でまとめられ，ゲージ場に関する作用積分は

$$\int \Pi dA_\mu(x) d\xi^a(x) d\xi^{a\dagger}(x) e^{i(S[A_{[}\mu]] + S_{gf} + S_{FP})} \tag{8.89}$$

$$S_{gf} = \int dx\, \frac{1}{2\alpha}(F[A_\mu])^2 \tag{8.90}$$

$$S_{FP} = -i\int dx\, \xi^{a\dagger}(x)\Delta\xi^a(x) \tag{8.91}$$

と表せる。ゲージ場以外の物質場が結合している場合には，物質場の項

$$S_M = \int dx \left[\overline{\psi}(\gamma(p_\mu + gT^A A_\mu^A)\psi - m\overline{\psi}\psi)\right] \tag{8.92}$$

を作用に加えておく。

8.5 ゲージ対称性と BRST 対称性

非可換ゲージ理論は局所的な対称変換

$$A_\mu(x) \to \Omega(x)A_\mu(x)\Omega(x)^{-1} + \Omega(x)\partial_\mu\Omega(x)^{-1} \tag{8.93}$$

に対して不変な理論であり，非可換群の内部対称性をもつ近接場の理論である。古典場がもつこの性質が，量子場の理論に及ぼす影響をここで調べよう。

ゲージ理論を正準形式で扱う古典力学や量子論ではゲージを固定する。ゲージ固定したゲージ理論は，当然ながらゲージ変換に対して不変ではない。またゲージ固定した量子論では，もとの理論とは一見大きく変わり，ゲージ場に加えてゲージ固定に付随したFPスカラー場を力学変数とする。これらの変数で表された作用積分 S は，ゲージ不変性に起因する新しい不変性であるBRST不変性をもつ。この性質は，量子理論のもつ不変性や対称性として表せる。

生成汎関数を使い，この対称性を明らかにしよう。生成汎関数は

$$\exp\left(iZ[J_\mu,\overline{\chi},\chi,\sigma,\overline{\sigma}]\right) = N\int DA_\mu D\overline{\psi}D\psi D\overline{\eta}D\eta \tag{8.94}$$

$$\times\exp\left[i(S+S_{gf}+S_{FP}+\langle J_\mu A_\mu + i\overline{\chi}\psi + i\overline{\psi}\chi + \eta^*\sigma + \eta\sigma^*\rangle)\right]$$

$$S = \int dx\left[\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \overline{\psi}(\gamma(p_\mu + gT^A A_\mu^A)\psi - m\overline{\psi}\psi)\right] \tag{8.95}$$

$$S_{gf} = \int dx\left[\frac{1}{2\alpha}(G^A)^2\right] \tag{8.96}$$

$$S_{FP} = \int dx\left[-i\overline{\eta}^A\frac{\partial G^A}{\partial A_\mu^B}(D_\mu)^{BC}\eta^C\right] \tag{8.97}$$

である。ここで，G^A はゲージ固定を表すゲージ場に依存する項であり，一つの例は，

$$G^A = \partial_\mu A_\mu^A \tag{8.98}$$

$$\frac{\partial G^A}{\partial A_\mu^B}(D_\mu)^{BC} = \partial_\mu^2\delta^{AC} + gf^{ABC}A_\mu^B\partial_\mu \tag{8.99}$$

である。上の式の第2項から，ゲージ場とFPスカラー場が相互作用する。これが非可換ゲージ理論の特徴である。可換ゲージ理論の場合には，この相互作用はない，そのため，FPスカラー場は自由場となる。

ここで求めるゲージ固定した理論がもつ不変性は，可換ゲージ理論では比較的見やすい。そこで，まず可換ゲージ理論での不変性を調べてみる。

8.5.1 可換ゲージ理論

可換ゲージ理論では，ゲージ不変な場の強度は $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ であり，生成母関数

$$\exp\left(iZ[J_\mu,\overline{\chi},\chi,\sigma,\overline{\sigma}]\right) = N\int DA_\mu D\overline{\psi}D\psi D\overline{\eta}D\eta$$

$$\times \exp\left[i(S+S_{gf}+S_{FP}+\langle J_\mu A_\mu + i\overline{\chi}\psi + i\overline{\psi}\chi + \eta^*\sigma + \eta\sigma^*\rangle)\right] \tag{8.100}$$

$$S = \int dx\left[\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \overline{\psi}(\gamma(p_\mu + eA_\mu)\psi - m\overline{\psi}\psi)\right] \tag{8.101}$$

$$S_{gf} = \int dx\left[\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2\right] \tag{8.102}$$

$$S_{FP} = \int dx\left[-i\overline{\eta}\partial_\mu^2\eta\right] \tag{8.103}$$

である。この作用は $\partial_\mu A_\mu$ と $\partial_\mu\eta$ についてほぼ対称な 2 次式である。だから x と y の 2 次形式 x^2+y^2 が x と y の回転で不変であるのと同様に，この作用はこれら 2 つの項 $\partial_\mu A_\mu$ と $\partial_\mu\eta$ についての回転で不変である。また，ゲージ固定に関係ない作用は当然ながらゲージ不変である。だから，この 2 項の回転であるとともにゲージ変換である操作に対して作用積分は不変である。この操作は，ゲージ場をゲージ変換し FP スカラー場を複素場の位相回転

$$\delta A_\mu = \frac{1}{e}\partial_\mu(\zeta^*\eta + \zeta\eta) \tag{8.104}$$

$$\delta\eta = -\frac{i}{\alpha e}(\partial A)\zeta \tag{8.105}$$

$$\delta\eta^* = \frac{i}{\alpha e}(\partial A)\zeta^* \tag{8.106}$$

する。電荷をもつ物質場に対しては位相回転

$$\delta\psi = -i(\zeta^*\eta + \zeta\eta)\psi \tag{8.107}$$

$$\delta\overline{\psi} = i\overline{\psi}(\zeta\eta^* + \zeta^*\eta) \tag{8.108}$$

$$\delta\eta^* = \frac{i}{\alpha e}(\partial A)\zeta^* \tag{8.109}$$

である。ここで FP スカラー場が通常のボース・アインシュタイン統計ではなく逆のフェルミ・ディラック統計に従うことに注意を払う必要がある。このため，変換パラメーター ζ,ζ^* は反可換な c 数である。上の変換をゲージ固定項に施すと，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\alpha}(\partial A)^2 + i\partial_\mu\eta^*\partial^\mu\eta \\
&\qquad \to \frac{1}{2\alpha}(\partial(A+\delta A))^2 + i\partial_\mu(\eta^*+\delta\eta^*)\partial^\mu(\eta+\delta\eta) \\
&\qquad = \frac{1}{2\alpha}(\partial A)^2 + i\partial_\mu\eta^*\partial^\mu\eta + i\partial_\mu\eta^*\partial^\mu\left(\frac{i}{-\alpha e}(\partial A)\zeta\right) \\
&\qquad\quad + i\partial_\mu\left(\frac{i}{\alpha e}(\partial A)\zeta^*\right)\partial^\mu\eta
\end{aligned} \tag{8.110}$$

となる。これより生成母関数は，変数変換した積分変数を使い，

$$\begin{aligned}
&\exp\left(iZ[J_\mu,\overline{\chi},\chi,\sigma,\overline{\sigma}]\right)\\
&\quad= N\int DA'_\mu D\overline{\psi}' D\psi' D\overline{\eta}' D\eta'\\
&\qquad\times\exp\left[i(S'+S'_{gf}+S'_{FP}+\langle J_\mu A_\mu{}'+i\overline{\chi}\psi'+i\overline{\psi}'\chi+\eta^{*\prime}\sigma+\eta'\sigma^*\rangle)\right]\\
&\quad= N\int DA_\mu D\overline{\psi} D\psi D\overline{\eta} D\eta\\
&\qquad\times\exp\left[i(S+S_{gf}+S_{FP}+\langle J_\mu A_\mu{}'+i\overline{\chi}\psi'+i\overline{\psi}'\chi+\eta^{*\prime}\sigma+\eta'\sigma^*\rangle)\right]
\end{aligned} \tag{8.111}$$

と表せる。積分変数をもとの変数に戻し，さらにζ,ζ^*が無限小であり，$\zeta=\zeta^*$であるとして，関係式

$$\begin{aligned}
&\int DA_\mu D\overline{\psi} D\psi D\overline{\eta} D\eta\\
&\quad\times\exp\left[i(S+S_{gf}+S_{FP}+\langle J_\mu A_\mu+i\overline{\chi}\psi+i\overline{\psi}\chi+\eta^*\sigma+\eta\sigma^*\rangle)\right]\\
&\quad\times\left[J_\mu\partial_\mu\frac{\eta+\eta^*}{e}-\overline{\chi}(\eta+\eta^*)\psi-\overline{\psi}(\eta+\eta^*)\chi+\frac{i}{\alpha e}(\partial A)\sigma-\frac{i}{\alpha e}(\partial A)\sigma^*\right]\zeta\\
&=0
\end{aligned} \tag{8.112}$$

を得る。

ここでさらに生成母関数からルジャンドル変換した有効作用で不変性をみる。場の期待値を自変数とした有効作用Γは

$$\begin{aligned}
\Gamma[A_{\mu,cl},\psi_{cl},\overline{\psi}_{cl},\eta_{cl},\eta^*_{cl}] &= Z[J_\mu,\chi,\overline{\chi},\sigma,\sigma^*]\\
&\quad-\langle JA_{cl}+i\overline{\psi}\psi_{cl}+i\overline{\psi}_{cl}\chi+\eta^*_{cl}\sigma+\eta_{cl}\sigma^*\rangle
\end{aligned} \tag{8.113}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial J_\mu}=A_{\mu,cl},\quad \frac{\partial Z}{\partial\chi}=\psi_{cl},\quad \frac{\partial Z}{\partial\overline{\chi}}=\overline{\psi}_{cl},\quad \frac{\partial Z}{\partial\sigma}=\eta_{cl},\quad \frac{\partial Z}{\partial\sigma^*}=\eta^*_{cl} \tag{8.114}$$

と定義される。これは，逆の関係式

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial A_{\mu cl}}=-J_\mu,\quad \frac{\partial\Gamma}{\partial\psi_{cl}}=-\chi,\quad \frac{\partial\Gamma}{\partial\overline{\psi}_{cl}}=-\overline{\chi},\quad \frac{\partial\Gamma}{\partial\eta_{cl}}=-\sigma,\quad \frac{\partial\Gamma}{\partial\eta^*_{cl}}=-\sigma^* \tag{8.115}$$

を満たしている。これらを使い，作用の不変性を表す恒等式が，

$$\begin{aligned}
&\Bigg\langle -\frac{1}{e}\frac{\delta\Gamma}{\delta A_{\mu cl}}\partial_\mu(\eta_{cl}+\eta^*_{cl})+i\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi_{cl}}(\eta_{cl}+\eta^*_{cl})\psi_{cl}-i\overline{\psi}_{cl}(\eta_{cl}+\eta^*_{cl})\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}_{cl}}\\
&\qquad\qquad+\frac{i}{\alpha e}(\partial A_{cl})\frac{\delta\Gamma}{\delta\eta_{cl}}-\frac{i}{\alpha e}(\partial A_{cl})\frac{\delta\Gamma}{\delta\eta^*_{cl}}\Bigg\rangle=0
\end{aligned} \tag{8.116}$$

と求まる。この関係式は相互作用の効果を含めて成立する厳密な関係式である。そのため，これから様々なグリーン関数が従う関係式が導かれる。

有効作用は相互作用の効果を含む場についての汎関数である。場について 2 次の低いべきから高いべきまでが有効作用には含まれていて，具体的に，

$$\Gamma = \int dxdy \left[\frac{1}{2} A_{\mu cl}(x) \Delta^{-1}_{\mu\nu}(x-y) A_{\nu cl}(y) + \overline{\psi}_{cl}(x) S^{-1}(x-y) \psi_{cl}(y) \right.$$
$$\left. + i\eta^*_{cl}(x) \Delta^{-1}(x-y) \eta_{cl}(y) \right]$$
$$+ \int dxdydz \overline{\psi}_{cl}(x) A_{\rho cl}(y) \Gamma_\rho(x,y,z) \psi_{cl}(z) + \cdots \qquad (8.117)$$

と展開される。ここで右辺の 1 項目は電磁場ポテンシャルの伝播，2 項目は電子場の伝播，3 項目は FP スカラー場の伝播を表現する汎関数であり，$\Delta^{-1}_{\mu\nu}(x-y)$，$S^{-1}(x-y)$，$\Delta^{-1}(x-y)$ は，それぞれ電磁場，FP スカラー，電子場の伝播関数である。また 4 項目は電子と電磁場との相互作用を表し，$\Gamma_\rho(x,y,z)$ が vertex 部である。

この展開式を，恒等式 (8. 5. 1) に代入する。まず $\psi = 0$ かつ $\overline{\psi} = 0$ とおく。すると，

$$k_\mu \Delta^{-1}_{\mu\nu}(k) + \frac{1}{\alpha} k_\mu k^2 = 0 \qquad (8.118)$$

となる。この式は，電磁場の伝播関数の縦方向の成分は，α だけで決まっていること，すなわち相互作用の影響を受けないことを示している。

次に ψ_{cl} と ψ_{cl} に比例する項についての等式から，

$$\frac{\partial}{\partial y_\mu} \Gamma_\mu(x,y,z) - iS^{-1}(x-y)\delta(x-y) + iS^{-1}(x-z)\delta(x-y) = 0 \qquad (8.119)$$

が得られる。運動量表示では，

$$(p-q)_\mu \widetilde{\Gamma}_\mu(p, p-q) = S^{-1}(p) - S^{-1}(q) \qquad (8.120)$$

と Ward-高橋恒等式となる。両辺を $p-q$ で展開して $p-q$ の最低次の係数を比較することから，電荷が普遍的な値になることが導かれる。

8.5.2 非可換ゲージ理論

非可換ゲージ理論でもゲージ固定は可換ゲージ理論と同様にされる。そのため，ゲージ固定で決まる作用項は可換ゲージ場の理論と同様な構造をもち，ゲージ固定項と FP スカラー場の回転でゲージ場や物質場のゲージ変換である BRST 変換に対する不変性をもつ。ところが，非可換ゲージ理論では FP スカラー場とゲージ場との相互作用項が含まれる。そのため BRST 変換の扱いは複

雑になるが，最終的には可換の場合と同様な恒等式が成立する。FP スカラー場を実数部と虚数部に

$$\zeta^A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^A + i\rho^A) \tag{8.121}$$

$$\zeta^{A*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^A - i\rho^A) \tag{8.122}$$

と分解する。これらを使い，ゲージ固定項は

$$L_{gf} = \frac{1}{2\alpha}G^A G^A + \omega^A \frac{\partial G^A}{\partial A_\mu^B}(D_\mu)^{BC}\rho^C \tag{8.123}$$

と表せる。

全微分項を除いて作用を不変にする反可換なパラメーターによる場の変換は，

$$\delta A_\mu^B = \frac{1}{g}\zeta(D_\mu\rho)^B \tag{8.124}$$

$$\delta\omega^C = -\frac{1}{\alpha g}(\partial A^C)\zeta \tag{8.125}$$

$$\delta\rho^C = \frac{1}{2}\zeta f^{ABC}\rho^B\rho^C \tag{8.126}$$

$$\delta\psi = i\zeta\rho^A T_f^A\psi \tag{8.127}$$

と定義される。このとき実際，

$$\begin{aligned}
\delta L_{gf} &= \frac{1}{\alpha}G^A\frac{\partial G^A}{\partial A_\mu^B}\delta A_\mu^B + \delta\omega^A\frac{\partial G^A}{\partial A_\mu^B}(D_\mu^{BC}\rho^C) + \omega^A\frac{\partial G^A}{\partial A_\mu^B}\delta(D_\mu\rho)^B \\
&= \frac{1}{\alpha}G^A\frac{\partial G^A}{\partial A_\mu^B}\delta A_\mu^B + \delta\omega^A\frac{\partial G^A}{\partial A_\mu^B}(D_\mu^{BC}\rho^C) + \omega^A\frac{\partial G^A}{\partial A_\mu^B}\delta(D_\mu^{BC}\rho^C) \\
&= \frac{1}{\alpha}G^A\frac{\partial G^A}{\partial A_\mu^B}\frac{1}{g}\zeta(D_\mu\rho)^B - \frac{1}{\alpha g}(\partial A^C)\zeta\frac{\partial G^A}{\partial A_\mu^B}(D_\mu^{BC}\rho^C) + \omega^A\frac{\partial G^A}{\partial A_\mu^B}\delta(D_\mu^{BC}\rho^C) \\
&= \omega^A\frac{\partial G^A}{\partial A_\mu^B}\delta(D_\mu^{BC}\rho^C)
\end{aligned} \tag{8.128}$$

となり初めの 2 項が打ち消す。ここで残された項は，

$$\begin{aligned}
\delta(D_\mu\rho)^B &= \partial_\mu\delta\rho^B + f^{BCE}(D_\mu\zeta\rho)^E\rho^C + f^{BCE}A_\mu^E\delta\rho^C \\
&= \partial_\mu\delta\rho^B + f^{BCE}\partial_\mu(\zeta\rho)^E\rho^C + f^{BCE}f^{EFG}A_\mu^F(\zeta\rho)^G\rho^C \\
&= \partial_\mu(\delta\rho^B + \frac{1}{2}f^{BCE}\zeta\rho^E\rho^C) + f^{BCE}f^{EFG}A_\mu^F(\zeta\rho)^G\rho^C + f^{BCE}A_\mu^E\delta\rho^C
\end{aligned} \tag{8.129}$$

と変形される。$\delta\rho$ の定義から初めの項が消え，残るのは

$$\delta(D_\mu\rho)^B = f^{BCE}f^{EFG}A_\mu^F(\zeta\rho)^G\rho^C + f^{BCE}A_\mu^E\delta\rho^C \tag{8.130}$$

である。さらに FP スカラーはゲージ場と同じ adjoint 表現に属するので

$$f^{ABC} = i(T^A)^{BC} \tag{8.131}$$

が成り立つ。これを使い書き換えて残された項が

$$\begin{aligned}
\delta(D_\mu \rho)^B &= -\zeta((T^F T^C)^{GB}) A_\mu^G \rho^F \rho^C + \frac{i}{2}\zeta f^{FCE}(T^E)^{GB} A_\mu^G \rho^F \rho^C \\
&= -\zeta\left(\frac{[T^F, T^C]^{GB}}{2}\right) A_\mu^G \rho^F \rho^C + \frac{i}{2}\zeta f^{FCE}(T^E)^{GB} A_\mu^G \rho^F \rho^C \\
&= -\frac{i}{2}\zeta f^{FCE}(T^E)^{GB} A_\mu^G \rho^F \rho^C + \frac{i}{2}\zeta f^{FCE}(T^E)^{GB} A_\mu^G \rho^F \rho^C \\
&= 0
\end{aligned} \tag{8.132}$$

と完全に打ち消すことがわかる。結局，ゲージ固定した作用は場の変換式 (8.124)，式 (8.125)，式 (8.126)，式 (8.127) に対して不変である。この不変性を生成母関数や，有効作用についての関係式として表す。可換ゲージ場の場合と同様に有効作用 $\Gamma[A_{\mu,cl}, \psi_{cl}, \overline{\psi}_{cl}, \omega_{cl}^C, \rho_{cl}^C]$ が関係式 (ST 恒等式)，

$$\left\langle \frac{1}{g}\frac{\delta\Gamma}{\delta A_{\mu}{}_{cl}^{B}}(D_\mu \rho_{cl})^B + i\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi_{cl}}(\rho^A T_f^A \psi_{cl}) - i\overline{\psi}_{cl} T_f^A \rho^A)\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}_{cl}} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\alpha g}(\partial A_{cl}^C)\frac{\delta\Gamma}{\delta\omega_{cl}^C} - \frac{1}{2}f^{ABC}\rho^B\rho^C\frac{\delta\Gamma}{\delta\rho^{*}{}_{cl}^{A}} \right\rangle = 0 \tag{8.133}$$

を満たすことがわかる。恒等式 (8. 5. 1), (8.133) は厳密な等式であり，次に述べる 摂動展開や繰り込みに際して，いくつかのグリーン関数やいくつかのパラメーターの間に成立する関係式を導く有力なものである。

8. 6 摂動理論 1

非可換ゲージ場の理論の経路積分表示が得られた。この表示から，さらに量子論における物理量を計算するためには経路積分を具体的に計算することが必要である。摂動論に基づいて，経路積分を具体的に計算する。

上で得られた作用は，ゲージ場について 2 次式，3 次式，4 次式の項からなっているため，解析的な計算はほぼ不可能である。しかし，2 次式の項は電磁気学の場合と本質的に同じである。また 3 次式や 4 次式の項は相互作用の大きさを表すパラメーターである結合定数 g に比例するか，g^2 に比例する。そのため，結合定数 g についての摂動展開を使うことができる。摂動展開の考え方や方法はスカラー場の理論で行ったのと同じであるが，ゲージ理論では対称性が極めて大事である。方程式が対称性やゲージ不変性に基づき定式化され，前の節で見たように，量子論でも対称性が重要な役割をする。これらの対称性のた

めに，摂動論において相異なるグリーン関数間に多くの関係式が成立する。これらの関係式が実際に成立することを確認し，対称性と矛盾なく計算していることを示す必要がある。

ゲージ固定として具体的に

$$F[A_\mu] = \partial^\mu A^a_\mu(x) \tag{8.134}$$

とした場合を以下に考察する。ゲージ場についての作用積分を結合定数に関する次数に応じて分けて

$$S[\text{gauge field}] = S_0 + S_1 + S_2 \tag{8.135}$$

$$S_0 = \int dx(\frac{1}{4}(F^0_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu(x))^2) + \partial_\mu {\xi^a}^\dagger \partial^\mu \xi^a \tag{8.136}$$

$${F^0}^a_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\nu \tag{8.137}$$

$$S_1 = -g\int dx f^{ABC} A^A_\mu A^B_\nu \partial_\mu A^C_\nu - ig\int dx[\overline{\eta}^A f^{ABC} A^B_\mu \partial_\mu \eta^C] \tag{8.138}$$

$$S_2 = \frac{1}{4}g^2 f^{ABE} f^{CDE} A^A_\mu A^B_\nu A^C_\mu A^D_\nu \tag{8.139}$$

と表そう。場の二次形式である S_0 は結合定数によらないため，可換ゲージ理論と変わらない形をしている。だから非可換ゲージ理論で摂動論を展開する際のゲージ場の 2 点関数 (propagator) は形のうえでは，可換ゲージ理論の 2 点関数と一致する。S_0 よりゲージ場の 2 点関数は，

$$\langle 0|T(A^A_\mu(x)A^B_\nu(y))|0\rangle = \int \frac{dp}{(2\pi)^4}(-i)\frac{\delta^{AB}}{p^2}\left[\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right] e^{-ip(x-y)} \tag{8.140}$$

と決まり FP スカラー場の 2 点関数は，

$$\langle 0|T(\xi^A(x){\xi^B}^\dagger(y))|0\rangle = \int \frac{dp}{(2\pi)^4}(-i)\frac{\delta_{AB}}{p^2} e^{-ip(x-y)} \tag{8.141}$$

と決まる (図 8.2)。ゲージ場の 2 点関数は内部自由度を示すパラメーター A をもつ点では，可換ゲージ場と異なるが，それ以外の関数形は可換ゲージ場と同じであることが確認できる。

非可換ゲージ理論の相互作用には，運動量表示で 3 ゲージ場の相互作用

$$-gf^{ABE}A^A_\mu(x)A^B_\nu(x)\partial_\mu A^C_\nu(x) \tag{8.142}$$

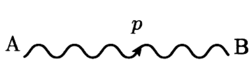


図 8. 1 ゲージ場の 2 点関数

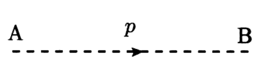


図 8. 2 FP スカラー場の 2 点関数

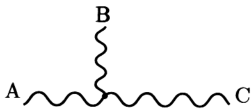


図 8.3　ゲージ場の 3 点関数

から

$$-igf^{ABC}[(r_\mu - q_\mu)\delta_{\nu\rho} + (q_\rho - p_\rho)\delta_{\mu\nu} + (p_\nu - r_\nu)\delta_{\mu\rho}], \tag{8.143}$$

4 ゲージ場の相互作用

$$\frac{1}{4}g^2 f^{ABE} f^{CDE} A_\mu^A(x) A_\nu^B(x) A_\mu^C(x) A_\nu^D(x) \tag{8.144}$$

から

$$-g^2[f^{ABE} f^{CDE}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\sigma}) + f^{CBE} f^{ADE}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma}) \\ + f^{DBE} f^{CAE}(\delta_{\sigma\rho}\delta_{\nu\mu} - \delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\sigma})] \tag{8.145}$$

がある (図 8.4)。また，FP スカラー場とゲージ場の相互作用

$$-gf^{abc}p^\mu \tag{8.146}$$

がある (図 8.5)。また物質場とゲージ場の相互作用項 (8.92) から，物質場の 2 点関数 (図 8.6)

$$\langle 0|T\psi(x)\overline{\psi}(y)|0\rangle = \int \frac{dk}{(2\pi)^4}\frac{i}{\gamma k - m}e^{-ip(x-y)} \tag{8.147}$$

と物質場とゲージ場との相互作用

$$ig\gamma^\mu t^a \tag{8.148}$$

が得られる (図 8.7)。2 点関数 (propagator) と相互作用 vertex が求まったので，具体的に摂動計算を遂行することができる。運動量についての積分は，N 次元法で求めると見通しがよい。

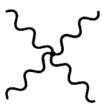


図 8.4　ゲージ場の 4 点関数

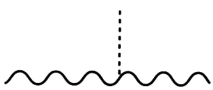


図 8.5　ゲージ場と FP スカラー場の相互作用

図 8.6　物質場の 2 点関数

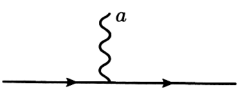


図 8.7　ゲージ場と物質場の相互作用

8.7　摂動理論 2

まず，物質場の 2 点関数にゲージ場が与える相互作用の 2 次の効果と，ゲージ場の 2 点関数にゲージ場間の相互作用の及ぼす 2 次の効果を調べよう。

ゲージ場とフェルミオン場との相互作用の 2 次の効果で，フェルミオン場の自己エネルギー (図 8.8) が，

$$\Sigma(p) = \int \frac{d^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}} \mathrm{Tr}[\gamma_\mu(p\gamma + m)\gamma_\nu]\, \mathrm{Tr}\,[t^A t^B] \frac{1}{p^2+m^2} \frac{1}{(q-p)^2} \times \delta_{AB} \left(g^{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{(q-p)_\mu (q-p)_\nu}{(q-p)^2} \right) \tag{8.149}$$

$$= \mathrm{Tr}\,[t^A t^B] \Sigma^{\mathrm{QED}}(p) \tag{8.150}$$

と与えられる。この次数では，ゲージ場の 2 点関数は QED の 2 点関数と同じ振る舞いをする。自己エネルギーは，QED の章で与えられている QED の自己エネルギーに内部自由度の寄与が加わったものである。

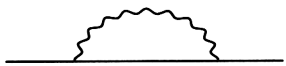


図 8.8 物質場の自己エネルギー

非可換ゲージ理論の特徴はゲージ場が電荷をもつことである。一方，ゲージ場は電荷と相互作用するので，ゲージ場は電荷をもつ物質と電荷をもつゲージ場の両方と相互作用する。ゲージ場の 2 点関数は相互作用の 0 次では可換ゲージ場の 2 点関数と等価であった。しかしゲージ場の自己相互作用からの高次補正を取り入れたとき，2 点関数は可換ゲージ場の 2 点関数とは大きく異なってくる。相互作用の 2 次の補正について次に考察する。

ゲージ場の自己相互作用によるゲージ場の 2 点関数 (図 8.9) は

$$\Pi^{1AB}_{\mu\nu}(p) = -\frac{1}{2} g^2 \mu^{2\epsilon} f^{ACD} f^{BDC} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{N_{\mu\nu}(l,p)}{l^2(l+p)^2} \tag{8.151}$$

$$\begin{aligned} N_{\mu\nu}(l,p) &= [(2l+p)_\mu \delta_{\rho\sigma} - (l+2p)_\sigma \delta_{\mu\rho} + (p-l)_\rho \delta_{\mu\sigma}] \\ &\quad \times [(2l+p)_\nu \delta_{\rho\sigma} - (l+2p)_\sigma \delta_{\rho\nu} + (p-l)_\rho \delta_{\sigma\nu}] \\ &= (8\omega - 6) l_\mu l_\nu + (4\omega - 3)(l_\mu p_\nu + l_\nu p_\mu) \\ &\quad + (2\omega - 6) p_\mu p_\nu + [(p-l)^2 + (2p+l)^2] \delta_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{8.152}$$

となる。ファインマンパラメーターを導入して被積分関数の分母をまとめて

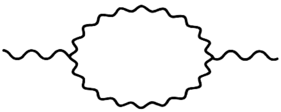


図 8.9 ゲージ

$$\Pi^{1AB}_{\mu\nu}(p) = -\frac{1}{2}g^2\mu^{2\epsilon}f^{ACD}f^{BDC}\int_0^1 dx\int\frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{N_{\mu\nu}(l-px,p)}{(l^2+p^2x(1-x))^2} \tag{8.153}$$

$$N_{\mu\nu}(l-px,p) = (8\omega-6)l_\mu l_\nu + [(8\omega-6)x(x-1)+2\omega-6]p_\mu p_\nu + [2l^2+p^2(2x(x-1)+5)]\delta_{\mu\nu} \tag{8.154}$$

と表す。N 次元法で運動量積分を実行して,

$$\Pi^{1AB}_{\mu\nu}(p) = -\frac{1}{2}g^2\mu^{2\epsilon}f^{ACD}f^{BDC}\int_0^1 dx\left\{\frac{(6\omega-3)\delta_{\mu\nu}\Gamma(1-\omega)}{[p^2x(1-x)]^{1-\omega}} + \frac{\Gamma(2-\omega)}{[p^2x(1-x)]^{2-\omega}}\times[\delta_{\mu\nu}p^2(5-2x(1-x)) + p_\mu p_\nu(2\omega-6-(8\omega-6)x(1-x))]\right\} \tag{8.155}$$

また FP スカラー場によるゲージ場の 2 点関数 (図 8.10) は,

$$\begin{aligned}\Pi^{2AB}_{\mu\nu}(p) &= g^2\mu^{2\epsilon}f^{DCA}f^{CDB}\int\frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{(l+p)_\mu l_\nu}{l^2(l+p)^2}\\ &\quad - g^2\mu^{2\epsilon}f^{DCA}f^{CDB}\int_0^1 dx\int\frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{(l-px)_\nu(l+p(1-x))_\mu}{[l^2+p^2x(1-x)]^2}\\ &= -\frac{g^2\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^\omega}f^{DCA}f^{CDB}\int_0^1 dx\\ &\quad\times\left(\frac{\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\Gamma(1-\omega)}{[p^2x(1-x)]^{1-\omega}} - \frac{p_\mu p_\nu x(1-x)\Gamma(2-\omega)}{[p^2x(1-x)]^{2-\omega}}\right)\end{aligned} \tag{8.156}$$

である。また物質場によるゲージ場の 2 点関数は, 2 次のオーダーで QED の計算と本質的に一致し,

$$\Pi^{2AB}_{\mu\nu}(p) = g^2\,\mathrm{Tr}(T^AT^B)\Pi^{\mathrm{QED}}_{\mu\nu}(P)$$

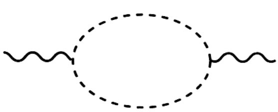


図 8.10 FP スカラー場によるゲージ場の自己エネルギー

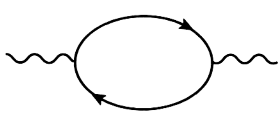


図 8.11 物質場によるゲージ場の自己エネルギー

$$= -C_f \delta^{AB} \frac{g^2}{16\pi^2} (\delta_{\mu\nu}{}^2 p^2 - p_\mu p_\nu) \frac{4}{3} \frac{1}{\epsilon} + \cdots \tag{8.157}$$

である (図 8.11)。

同様にゲージ場の自己相互作用によるゲージ場の 3 点関数は図 8.12 で与えられる。さらに，ゲージ場の自己相互作用によるゲージ場の 4 点関数が図 8.13 で与えられる。

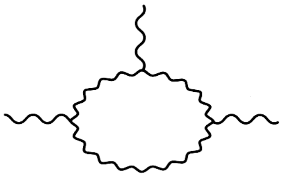


図 8.12 ゲージ場の 3 点 vertex

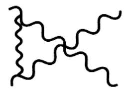


図 8.13 ゲージ場の 4 点 vertex

摂動論の計算から，運動量についての積分にいくつかの発散があることがわかった。発散は，質量，結合定数と場の規格化定数だけにあり，他の物理量の計算に際しては，これらの発散が起源となっている。ところで，質量，結合定数と場の規格化定数はラグランジアンに含まれるパラメーターである。そのため，発散量を取り除いた計算を行う "繰り込み" に際してラグランジアンを使うのが見通しよい方法である。ゲージ理論では特に対称性が重要である。対称性にそくして計算を行うのに N 次元法は極めて有効である。

ラグランジアンを，もとの場 ψ^0, $A_\nu^{B^0}$, η^{B^0}, 質量 m_0 と結合定数 g_0, g_0', g_0'', g_0''' で表すと，

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{4} F^0_{\mu\nu} F^0_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha} (\partial A^0)^2 + i\partial_\mu \eta^{B^{0*}} \partial_\mu \eta^{B^0} + \overline{\psi}^0 (p\gamma - m_0) \psi^0 \\ & - \frac{i}{2} g_0''' \mu^{2-\omega} f^{ABC} A_\mu^{C^0} \eta^{*A^0} \partial_\mu \eta^{B^0} - \frac{i}{2} g_0'''' \mu^{2-\omega} f^{ABC} \eta^{*A^0} \eta^{B^0} \partial A^{C^0} \\ & + g_0 \mu^{2-\omega} A_\mu^{B^0} \overline{\psi}^0 \gamma_\mu T_f^B \psi^0 \end{aligned} \tag{8.158}$$

$$F_{\mu\nu}{}^0 = \partial_\mu A_\nu^{B^0} - \partial_\nu A_\mu^{B^0} - g_0' \mu^{2-\omega} f^{BCD} A_\mu^{C^0} A_\nu^{D^0} \tag{8.159}$$

$$[T_f^B, T_f^C] = i f^{BCD} T_f^D, \quad 2\omega = D \tag{8.160}$$

である。ゲージ場の結合定数を区別して表しておいた。相互作用の効果を取り入れたとき，それぞれの場の 2 点関数は大きく変わる。2 点関数の p^2 についての極の位置が $m_0{}^2$ からずれ，極における留数は 1 からずれる。極の位置は相互作用の効果を含む質量であるので，m と表す。また，2 点関数の極における留数を

1 にさせるように，場のスケールを変換して規格化された場 $\psi(x), A_\mu^C(x), \eta^A(x)$ を導入する。規格化されるよう再定義された場が繰り込まれた場であり，m が繰り込まれた質量である。同様に繰り込まれた結合定数 g とゲージ固定パラメーター α を定義する。パラメーターの変換式は，スケール変換

$$\psi^0 = {Z_2}^{1/2}\psi = (1+K_2)^{1/2}\psi \tag{8.161}$$

$$A_\mu^{C0} = {Z_3}^{1/2}A_\mu^C = (1+K_3)^{1/2}A_\mu^C \tag{8.162}$$

$$\eta^{A0} = {Z_6}^{1/2}\eta^A = (1+K_6)^{1/2}\eta^A \tag{8.163}$$

$$m_0 = m\frac{Z_m}{Z_2} = m\frac{1+K_m}{1+K_2} \tag{8.164}$$

$${\alpha_0}^{-1} = \alpha^{-1}\frac{Z_\alpha}{Z_3} = \alpha^{-1}\frac{1+K_\alpha}{1+K_3} \tag{8.165}$$

$$g_0 = g\mu^\epsilon\frac{Z_1}{Z_2Z_3^{1/2}} = g\mu^\epsilon\frac{1+K_1}{Z_2Z_3^{1/2}} \tag{8.166}$$

$$g_0' = g\mu^\epsilon\frac{Z_4}{Z_3^{3/2}} = g\mu^\epsilon\frac{1+K_4}{Z_3^{3/2}} \tag{8.167}$$

$$g_0''' = g\mu^\epsilon\frac{Z_7}{Z_3^{1/2}Z_6} = g\mu^\epsilon\frac{1+K_7}{Z_3^{1/2}Z_6} \tag{8.168}$$

$$g_0'''' = g\mu^\epsilon\frac{Z_8}{Z_3^{1/2}Z_6} = g\mu^\epsilon\frac{1+K_8}{Z_3^{1/2}Z_6} \tag{8.169}$$

で与えられる。ここで前述の $S=T$ 恒等式より，関係式

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_3} = \frac{Z_7}{Z_6} = \frac{Z_8}{Z_6} \tag{8.170}$$

が得られる。これは，

$$g_0 = g_0' = g_0'' = g_0''' \tag{8.171}$$

に等価である。

8.8　質量をもつゲージ場

今までの考察では，ゲージ場は，QED と同じで質量をもたない。このため，このゲージ場の与える力は距離の 2 乗に反比例する電気的なクーロン力と等価な長距離力である。しかし，弱い相互作用は，摂動論を使い計算できる理論でありながら長距離力ではなく近距離力である。近距離力は，有限質量の場が引き起こす効果である。弱い相互作用は近距離力である一方で，異なる種類の素粒子間で普遍的に相互作用する。電子，ミューオン，タウという荷電レプトン

の弱い相互作用とクォークの弱い相互作用は，混合角等の問題を除外すると同等である。このような個々の物質とは関係なしに，弱い相互作用に普遍性があることは，弱い相互作用が物質とは独立な近接場に起源をもつ物理であると理解できる。だから，弱い相互作用は質量をもつゲージ場が引き起こしている物理現象であるとみなせる。ゲージ場が零質量であるのは，ゲージ原理からの必然的な事柄である。ではいかにして，ゲージ場が有限質量をもてるのだろうか？ ヒントは，超伝導現象で見つかっているマイスナー効果にある。超伝導体の内部には磁束が入り込めない。超伝導では，電荷 $2e$ をもつ電子対が凝縮しているため，磁場が従う方程式に質量項が現れる。この結果，方程式の時間依存性をもたない定常的な解は空間で一様ではなく，指数関数的に振る舞う。空間で一様な磁場の解は存在しない。このため，磁束が超伝導体の内部には入り込めないマイスナー効果が起きる。3 章で述べた荷電スカラー場が凝縮して，$U(1)$ 対称性が破れれば，荷電スカラー場が結合しているゲージ場に超伝導と同様にマイスナー効果が発現する。さらに，非可換群の場合のスカラー場が凝縮すれば，マイスナー効果が非可換ゲージ場に起きる。弱い相互作用を引き起こすゲージ場にマイスナー効果が起きれば，弱い相互作用は短距離力になる。

スカラー場とゲージ場の結合

物質場としてスカラー場 $\phi^A(x)$ を含む非可換ゲージ理論のラグランジアンは，

$$L = L_{(\text{gauge field})} + L_{(\text{scalar field})} + L_{(\text{matter})} \tag{8.172}$$

$$L_{(\text{scalar field})} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^A + gf^{ABC} A_\mu^B \phi^C)^2 - V(\phi^A) \tag{8.173}$$

である。ここで $L_{(\text{gauge field})}$ はゲージ場からなるラグランジアンであり，前の節で議論されたように，ゲージ場，ゲージ固定項と FP スカラー場を表す。$L_{(\text{matter})}$ はスカラー場以外の物質場を表す。スカラー場のべき関数 $V(\phi)$ は微分項を含まないためゲージ場なしでゲージ不変である。しかし，繰り込み可能な理論であるために，$V(\phi)$ はスカラー場の高々 4 次式である。$V(\phi)$ を最小とするスカラー場が基底状態の性質とゲージ場の性質を決める。実現する相に依存してゲージ場の質量が異なる。

通常の基底状態はスカラー場の期待値が 0，$\langle \phi^A \rangle = 0$ で実現している。この状態は，スカラー場の変換に対して不変であり，式 (8.173) でゲージ場は

$$gf^{ABC} A_\mu^B \phi^C \partial_\mu \phi^A + g^2 (f^{ABC} A_\mu^B \phi^C)^2 \tag{8.174}$$

となる相互作用項からなる。ゲージ場の 2 乗項であるゲージ場の質量項はラグランジアンに含まれない。

ところが，無限自由度の物理系である場の理論では，基底状態 (真空) は一つであるとは限らない。様々な真空がありうる。その中で，スカラー場の期待値が 0 でない有限の一定値 $\langle\phi^A\rangle \neq 0$ をもつ基底状態では，ラグランジアンに式 (8.173) から

$$+g^2(f^{ABC}A_\mu^B\langle\phi^C\rangle)^2 \tag{8.175}$$

なるゲージ場の 2 乗の質量項が出てくる。このため，ゲージ場は有限な質量をもち静的な 2 点関数が指数関数的に振る舞う。だから，電荷間の力が短距離型となる。結合定数は物質の表現で決まる普遍的な振る舞いをしながら，短距離型の相互作用という弱い相互作用の特徴が再現される。結局，スカラー場が凝縮して一定の期待値をもつ基底状態でゲージ場が質量項をもつマイスナー効果が発現する。$SU(2)$ 群の場合，質量項は

$$\begin{aligned} g^2(\epsilon^{ABC}A_\mu^B\langle\phi^C\rangle)^2 = g^2(&A_\mu^2\langle\phi^3\rangle - A_\mu^3\langle\phi^2\rangle)^2 \\ &+ (A_\mu^3\langle\phi^1\rangle - A_\mu^1\langle\phi^3\rangle)^2 + (A_\mu^1\langle\phi^2\rangle - A_\mu^2\langle\phi^1\rangle)^2 \end{aligned} \tag{8.176}$$

となる。$\langle\phi^3\rangle \neq 0$ のときは，

$$g^2(\epsilon^{ABC}A_\mu^B\langle\phi^C\rangle)^2 = g^2(A_\mu^2\langle\phi^3\rangle)^2 + (A_\mu^1\langle\phi^3\rangle)^2 \tag{8.177}$$

となり A_μ^1 と A_μ^2 が質量をもち A_μ^3 は零質量のままである。つまり，$\langle\phi^3\rangle \neq 0$ のときは，内部空間の 3 軸まわりの回転対称性は保たれることより，3 軸方向のゲージ場は質量をもたない。複数個あるゲージ場が質量をもつ様子はゲージ群の構造，真空期待値をもつスカラー場の変換性や期待値をもつ方向等の理論や対称性の破れの詳細に依存する。このように，スカラー場が有限の値をもつ対称的ではない基底状態では，ゲージ場が質量をもつマイスナー効果が起きる。

実際の弱い相互作用では，弱い相互作用を担うゲージ場の一部は電荷をもつ。だから弱い相互作用と電磁気相互作用が $SU(2)\times U(1)$ 群に基づいて統一されたゲージ理論として構成される。この際，電磁相互作用のゲージ場である光子は零質量ゲージ場のままであり，質量をもつのは $W^\pm$ ゲージ場と Z ゲージ場である。このようなことを引き起こすような表現のスカラー場が使われ，対称性が破れ真空期待値をもつ。

8.8.1 対称性が破れゲージ場が質量をもつときの摂動論

対称性が自発的に破れ，スカラー場が有限な値をもつ基底状態における摂動論は，対称的な基底状態における摂動論と同じように扱える。ダイアグラムの

計算における発散は両者で変わらないため，対称的な基底状態における繰り込みが行われれば，対称性が破れた場合の繰り込みも行われる。

ゲージ場，物質場としてのディラック場と物質場としてのヒッグススカラー場が相互作用する系は，ラグランジアン，

$$L_1 = \frac{1}{4}F^0_{\mu\nu}F^0_{\mu\nu} + \overline{\psi}^0(p\gamma - m)\psi^0 + g\mu^{2-\omega}A^{B0}_{\mu}\overline{\psi}^0 A^{B0}_{\mu}\gamma_\mu T^B_f\psi^0$$
$$+ \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^A + gf^{ABC}A^B_\mu\phi^C)^2 - V(\phi^A) + g_f\overline{\psi}^0\tau^A\phi^A\psi^0 \quad (8.178)$$

で記述される。スカラー場が有限で一定値をとるとき，ゲージ場が質量をもつとともに，他の物質場が質量をもつ。ゲージ場の質量はゲージ結合定数 g とスカラー場の期待値 $\langle\phi\rangle$ で決まり，物質場の質量は物質場とヒッグス場との結合定数 g_f と スカラー場の期待値 $\langle\phi\rangle$ で決まる。結合定数 g_f の値を決めれば物質の質量が決まるが，結合定数 g_f の値を決めるルールはない。このため，物質場の質量について理論的にさらにつめるのは難しい。

量子化をするにあたりゲージ固定を行う。ゲージ固定のため，スカラー場を真空期待値のまわりで

$$\phi^A(x) = \phi^A_0 + \chi^A(x) \quad (8.179)$$
$$\phi^A_0 = \langle\phi^A(x)\rangle \quad (8.180)$$

と分解し，ゲージ固定を

$$F^A[A_\mu, \chi] = \frac{1}{\sqrt{\xi}}(\partial_\mu A^A_\mu - \xi g C^{AB}_0\chi^B) \quad (8.181)$$
$$C^{AB}_0 = f^{ABC}\phi^C_0 \quad (8.182)$$

により行うと見通しがよい。このゲージ固定はベクトル場の発散部 (縦波) と南部・ゴールドストン粒子とを一つの場に混合するものである。ξ はゲージ固定のために導入するパラメーターである。ゲージ固定に付随する FP 行列式を求めるため，ゲージパラメーターで微分して，

$$\frac{\delta F^A[A_\mu, \chi]}{\delta\alpha^B} = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\left(\frac{1}{g}(\partial_\mu D^\mu)^{AB} + \xi g C^{AC}_0 f^{CBE}(\phi^E_0 + \chi^E)\right) \quad (8.183)$$

を得る。これよりゲージ固定から生ずる FP 項は

$$L_{FP} = \overline{c}^A[-(\partial_{mu}D^\mu)^{AB} - \xi g^2 g C^{AC}_0 f^{CBE}(\phi^E_0 + \chi^E)] \quad (8.184)$$

と求まる。結局ゲージ固定項と FP スカラー項は，

$$L_{\text{gauge fixing}} + L_{FP} = -\frac{1}{2}(F^A[A_{mu}, \chi])^2 + \overline{c}^A\big[-(\partial_{mu}D^\mu)^{AB}$$
$$- \xi g^2 g C^{AC}_0 f^{CBE}(\phi^E_0 + \chi^E)\big]c^B \quad (8.185)$$

とまとまる。以上でラグランジアンがすべて求まった。全ラグランジアン L_1，$L_{\text{gauge fixing}}$ と L_{FP} から場の二次式を取りだすことにより，各場の 2 点関数が決まる。ゲージ場は有限質量をもつ場となる。また，場の高次の項から相互作用が決まり摂動展開による計算が行える。

ゲージ場の関係する場の 2 点関数を列挙しておこう。

ゲージ場の 2 点関数は

$$\frac{-i}{p^2 - g^2C^2}\left[\delta_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2 - \xi g^2 C^2}\right] \tag{8.186}$$

となる (図 8.14)。ヒッグススカラー場は

$$\frac{-i}{p^2 - \xi g^2 C^2 - M^2} \tag{8.187}$$

となり (図 8.15)，FP スカラー場は

$$\frac{-i}{p^2 - \xi g^2 C^2} \tag{8.188}$$

となる (図 8.16)。これらの 2 点関数と，相互作用からの vertex 部を使い，摂動計算が行える。

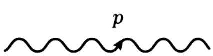


図 8. 14 ゲージ場の 2 点関数

図 8. 15 ヒッグススカラー場の 2 点関数

図 8. 16 FP スカラーの 2 点関数

8.9 ゲージ理論の古典解

3 章でスカラー場の理論の時空座標に依存する古典解を考察した。ここでは，ゲージ理論の古典解を求める。初め，時間に依存しない静的な解を調べ，次に四次元ユークリッド空間における，古典解を調べる。

磁気モノポール解[1)]

対称性が自発的に破れる系を，まず調べよう。

1) G.'t Hooft, Nucl. Phys. **B79**, 276(1974); A. M. Polyakov, JETP Lett. **20**, 194 (1974).

ベクトル表現 (随伴表現) のスカラー場が結合した $SU(2)$ 非可換ゲージ理論

$$S = \int dx^4 \left[\frac{1}{4e^2} \boldsymbol{F}_{\mu\nu}^2 + (\partial_\mu \boldsymbol{\varphi} + e(\boldsymbol{A}_\mu \times \boldsymbol{\varphi})^2 - \frac{1}{4}\lambda(\boldsymbol{\varphi}^2 - \eta^2)^2) \right] \tag{8.189}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu + \boldsymbol{A}_\mu \times \boldsymbol{A}_\nu \tag{8.190}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \epsilon^{abc} A_\mu^b \times A_\nu^c \tag{8.191}$$

$$\partial_\mu \boldsymbol{\varphi} + e(\boldsymbol{A}_\mu \times \boldsymbol{\varphi})^a = \partial_\mu \varphi^a + \epsilon^{abc} A_\mu^b \varphi^c \tag{8.192}$$

では，ラグランジアンの最後の項のためにエネルギーが $\varphi^2 = \eta^2$ で最小になる。そのため $SU(2)$ 対称性は自発的に破れる。$SU(2)$ 群のベクトルとしての変換性をもつスカラー場が，3 軸方向に真空期待値

$$\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle = (0, 0, \eta) \tag{8.193}$$

をもつとき，ベクトル場やスカラー場の質量は

$$A_\mu^{\pm} : m_{\pm}^2 = e^2 \eta^2 \tag{8.194}$$

$$\varphi : m_{\text{scalar}}^2 = 2\lambda \eta^2 \tag{8.195}$$

$$A_\mu^3 : {m_3}^2 = 0 \tag{8.196}$$

となる。スカラー場の値が内部空間の第 3 の方向を向いているので，第 3 方向を軸とする内部回転に関しては，対称性が保たれている。そのため，対応するゲージ場 $A_\mu^3(x)$ は質量をもたず零質量のままである。$A_\mu^3(x)$ は電磁場と同じ性質をもつ。破れた対称性に対応するゲージ場は質量をもつ。

次にこの理論における空間に依存し時間には依存しない静的な古典解を考察する。空間の遠方では，一定の大きさになる次の関数形を仮定する。

$$A_\mu(x) = \epsilon_{\mu ab} \frac{x_b}{r} a(r) \tag{8.197}$$

$$\varphi^a(x) = \frac{x_a}{r} u(r) \tag{8.198}$$

$$r = \sqrt{\boldsymbol{x}^2} \tag{8.199}$$

エネルギーが有限になるためには，$r \gg e\eta$ となる空間領域で

$$a(r) = -1/r \tag{8.200}$$

$$u(r) = \eta \tag{8.201}$$

と振る舞う必要がある。実際このような解がある。これを，特異なゲージ変換でスカラー場が 3 軸方向に値をもつように

$$\varphi^a = \eta \delta_{a3} \tag{8.202}$$

と変換すると，ゲージ場は

$$F_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k^3 = \frac{1}{2}\frac{x_\mu}{|\boldsymbol{x}|^3} - 2\pi\theta(x_3)\delta(x_1)\delta(x_2) \tag{8.203}$$

となる。A_μ^3 が電磁場であれば，この場は磁場である。つまり磁場が源をもつ解であるディラックの磁気単極子になっている。

8.9.1 インスタントン[2)]

物質場が結合していない $SU(2)$ 非可換ゲージ理論

$$S = \int dx^4 \frac{1}{4e^2}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}^2 \tag{8.204}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu + \boldsymbol{A}_\mu \times \boldsymbol{A}_\nu \tag{8.205}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \epsilon^{abc} A_\mu^b \times A_\nu^c \tag{8.206}$$

には，ユークリッド時空座標における古典解が知られている。方程式は，

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} - ig[A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0 \tag{8.207}$$

である。作用が有限になるために，十分遠方の領域でゲージ場の古典解は，ゲージ変換で表される必要がある。そのため，解を

$$A_\mu(x) = if(r)g^{-1}(x)\partial_\mu g(x) \tag{8.208}$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \tag{8.209}$$

$$g(x) = (x_4 - ix_a\tau_a)/r \tag{8.210}$$

とおく。これを方程式 (8.207) に代入して

$$rf' = 2f(1-f) \tag{8.211}$$

が得られる。これを満たすのは

$$f(r) = \frac{r^2}{r^2+\lambda^2} \tag{8.212}$$

である。よって，解が

$$A_\mu(x) = \frac{ir^2}{r^2+\lambda^2}g^{-1}\partial_\mu g \tag{8.213}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{4\lambda^2}{(r^2+\lambda^2)^2}\sigma_{\mu\nu} \tag{8.214}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4i}[\tau^i, \tau^j] \tag{8.215}$$

$$\sigma_{i4} = \frac{\tau_i}{2} = -\sigma_{4i} \tag{8.216}$$

---

2) A.A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz, and Y. Tyupkin, Phys. Letter, **59B**, 85 (1975).

となる。τ_i はパウリ行列であり，λ は解の大きさを決めるパラメーターである。この解は，不等式

$$\int dx(F-\widetilde{F})^2 \geq 0 \tag{8.217}$$

で等式を満たし

$$F_{\mu\nu} = \widetilde{F}_{\mu\nu} \tag{8.218}$$

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \tag{8.219}$$

となる self-dual な解である。

ユークリッド時空で作用が有限な古典解は，トンネル効果に寄与する。これらの古典解は，様々な非摂動効果に寄与する。

8.10 素粒子標準模型

素粒子標準理論は，3 世代のクォークとレプトン，強い相互作用，弱い相互作用と電磁相互作用を担うゲージ場，ならびに質量の起源となるヒッグス場から構成されている。強い相互作用は $SU(3)$ ゲージ理論であり，対称性が保たれゲージ場は質量をもたない。一方，電弱相互作用は $SU(2)\times U(1)$ ゲージ理論であり，対称性が一部破れるためゲージ場の一部は質量をもっている。対称性が破れるのは，ゲージ場と結合するスカラー場があり，スカラー場が有限の真空期待値をもつ基底状態が実現しているからである。

ゲージ場とスカラー場 (Higgs scalar) は，整数スピンをもちボース・アインシュタイン統計に従う。また，1/2 スピンをもちフェルミ・デイラック統計に従う物質に，クォークとレプトンがある。クォークは，$SU(3)$ 電荷と通常の電荷と弱い相互作用の電荷をもち，強い相互作用，電磁相互作用，弱い相互作用のすべてをする。レプトンは $SU(3)$ 電荷をもたず，弱い電荷をもつ。レプトンには，通常の電荷をもつ荷電レプトンと，もたないニュートリノがある。

クォークは，$SU(3)$ の 3 次元表現をなし，left 成分が $SU(2)$ の二次元表現で，right 成分が一次元表現をなす。一方，レプトンは強い相互作用をしないので $SU(3)$ 群の電荷をもたず，left 成分が $SU(2)$ の二次元表現で right 成分が一次元表現をなす。

以上の場と相互作用を表す標準模型は，ラグランジアン

$$L = L_1 + L_2 \tag{8.220}$$

$$L_1 = \frac{1}{4}G^0_{\mu\nu}G^0_{\mu\nu} + \overline{\Psi}^0_q(\gamma p)\Psi^0_q + g_s\mu^{2-\omega}\overline{\Psi}^0_q G^{B^0}_\mu \gamma_\mu T^B_f \Psi^0_q \tag{8.221}$$

$$L_2 = \frac{1}{4}F^0_{\mu\nu}F^0_{\mu\nu} + \overline{\widetilde{\psi}}{}^0_l(\gamma p)\widetilde{\psi}^0_l + g_{EW}\mu^{2-\omega}\overline{\widetilde{\psi}}{}^0_q A^{B^0}_\mu \gamma_\mu T^B_f \widetilde{\psi}^0$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi^A + g_{EW} f^{ABC} A^B_\mu \phi^C\right)^2 - V(\phi^A) + g_f \overline{\widetilde{\psi}}{}^0 \tau^A \phi^A \widetilde{\psi}^0 \quad (8.222)$$

で記述される。L_1 は強い相互作用の $SU(3)$ ゲージ理論を表し，$G_\mu(x)$ がグルーオンを $\Psi_q(x)$ がクォークを表す。また，L_2 は電弱理論の $SU(2)\times U(1)$ ゲージ理論を表し，$\widetilde{\psi}(x)$ がレプトンやクォークの chiral projection した場を表し，$A^B_\mu(x)$ が電弱ゲージボソンを，$\phi^A(x)$ がスカラー場を表す。

電弱ゲージ理論の $SU(2)$ に対するレプトンの表現は荷電レプトンが電子，μ，τ と 3 種類あり，それぞれに付随するニュートリノが 3 種類ある。これらの left handed 成分が二次元表現を構成し，right handed 成分が一次元表現をなし，

$$\widetilde{\psi}_l = \begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_L, (e)_R, (\mu)_R, (\tau)_R, (\nu_e)_R, (\nu_\mu)_R, (\nu_\tau)_R$$

である。

同じくクォークは，left handed 成分が二次元表現をなし，right handed 成分が一次元表現をなし，

$$\widetilde{\psi}_q = \begin{pmatrix}u_i\\ d_i\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}c_i\\ s_i\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}t_i\\ b_i\end{pmatrix}_L, (u_i)_R, (c_i)_R, (t_i)_R, (d_i)_R, (s_i)_R, (b_i)_R$$

である。

また，クォークは，強い相互作用のゲージ群で $SU(3)$ 三次元表現をなし，

$$\Psi_q = \begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t_1\\ t_2\\ t_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

である。

スカラー場 ϕ^A は対称性を破り電弱ゲージ場に質量を与えるとともに，クォークやレプトンに質量を与える。クォークやレプトンが 3 世代あるため，スカラー場との結合から，質量と世代間の混合が導かれる。スカラーとフェルミオンの結合定数は，フェルミオンの質量や混合角の実験値から決まる。

標準理論は，繰り込み可能な理論であり，質量や結合定数についての実験値を使い無限個の物理量が予言できる。量子電気力学で調べたフェルミ場の効果で対称性を破る軸性アノマリーが，ゲージ場と結合する電流に寄与すれば，ゲージ対称性が破れる。ゲージ対称性が破れれば，繰り込み可能性が成立しなくなる。電弱理論では，空間反転が最大に破れフェルミ粒子の left hand の場がゲージ場と結合する。このため，各フェルミ粒子がゲージ場と結合する電流にアノマリーの寄与を与える。しかし，ゲージ場と結合するクォークやレプトン

が，異なる寄与をするため，クォークとレプトンが同じ数あるならば，クォークとレプトン全体でアノマリーは打ち消してしまう。実際，レプトンとクォークはともに3世代ある。

ところで，強い相互作用は$SU(3)$ゲージ理論で表現され，量子色力学(quantum choromodynamics)とよばれる。ゲージ場はベクトル電流と結合するので，アノマリーの効果を受けない。バリオンのスペクトル，$e^- + e^+ \to q + \overline{q}$の断面積，$\pi^0 \to 2\gamma$崩壊率，等の実験値から，強い相互作用のゲージ群は$SU(3)$が妥当である。量子色力学のゲージ場であるグルーオンは，色電荷をもつので，クォーク間の引力の起源となるとともに，グルーオン間に力を与える。これらの引力は長距離で極めて強くなる。その結果，クォークやグルーオンは，単独で他の粒子から孤立して存在することはない。

また，電弱ゲージ理論のゲージ場は，$W^{\pm}$ボソン，Zボソン，光子である。$W^{\pm}$ボソンとZボソンは，約90 GeV/c^2の質量をもつ。これらは，大きな質量をもつため，クォークやレプトン等の粒子に崩壊する。そのため，重いゲージ場の寿命は短い。ヒッグス場の働きは，ゲージ場や物質に質量を与えることである。ヒッグス場と他の粒子の結合定数は決まるが，質量は決まらない。ヒッグス粒子は，まだ実験的には見つかっていない。

3世代あるクォークやレプトンは，ゲージ場と普遍的に結合し不定性はない。ところが，素粒子の質量や混合角はそれぞれ異なる。質量や混合角は，ヒッグススカラーとの結合の仕方で決まり，原理的にどのような値にもなり得る。これらを理論的に決めることは，まだできていない。

付　　録

1　反可換な c 数

フェルミオンの経路積分で必要となる反可換な c 数は，通常の実数や複素数とは異質なものである。これらの性質をここでまとめておこう。

1.1　反可換性

η_i $(i=1,N)$ を N 個の反可換数とする。これらは，

$$\eta_i\eta_j+\eta_j\eta_i=0 \tag{1}$$

を満たす。$i=j$ の場合は，

$$\eta_i^2=0 \tag{2}$$

となる。

1.2　一変数の関数と四則演算

変数 η の関数は，テイラー展開で，$\eta^2=0$ から，

$$f(\eta)=f_0+f_1\eta+f_2\eta^2+\cdots \tag{3}$$

$$=f_0+f_1\eta \tag{4}$$

と二つの数係数で表される。例えば，$e^{\lambda\eta}=1+\lambda\eta$ である。

関数 $f(\eta)$ と $g(\eta)=g_0+g_1\eta$ の和は，

$$f(\eta)+g(\eta)=(f_0+g_0)+(f_1+g_1)\eta \tag{5}$$

となる。

同様に，関数の積は

$$f(\eta)g(\eta)=(f_0+f_1\eta)(g_0+g_1\eta) \tag{6}$$

$$=f_0g_0+(f_1g_0+f_0g_1)\eta=g(\eta)f(\eta) \tag{7}$$

となる。関数の積は，明らかに可換である。

関数の逆は

$$\frac{1}{f(\eta)} = \frac{1}{f_0} - \frac{f_1}{f_0^2}\eta \tag{8}$$

となる。そのため，関数の商は

$$\frac{g(\eta)}{f(\eta)} = \frac{g_0}{f_0} - \frac{f_1 g_0 - f_0 g_1}{f_0^2}\eta \tag{9}$$

となる。

1.3 一変数の関数の微分積分

次に関数の微分を定義する。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \eta}1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta}\eta = 1 \\ &\frac{\partial}{\partial \eta}f(\eta) = f_1 \end{aligned} \tag{10}$$

微分は，

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(f(\eta) + g(\eta)) = \frac{\partial}{\partial \eta}f(\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta}g(\eta) \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta}f(\eta)g(\eta) &= f_1 g_0 + f_0 g_1 \\ &= (\frac{\partial}{\partial \eta}f(\eta))g(\eta) + f(-\eta)\frac{\partial}{\partial \eta}g(\eta) \end{aligned} \tag{12}$$

を満たす。

関数の定積分は，

$$\int d\eta_j = 0, \quad \int d\eta_j \eta_i = \delta_{ij} \tag{13}$$

を基本とし，性質，

$$\int d\eta (f(\eta) + g(\eta)) = \int d\eta f(\eta) + \int d\eta g(\eta) \tag{14}$$

$$\int d\eta f(\eta + a) = \int d\eta f(\eta) \tag{15}$$

$$\int d\eta \frac{\partial}{\partial \eta} f(\eta) = 0 \tag{16}$$

を満たす。これらの性質は，通常の実数関数に関する無限領域での収束する定積分がもつものである。多変数の反可換 c 数の関数の四則演算，微分，積分は同様に求まる。

積分が特異なものであるため，変数変換のヤコビアン J が通常と異なる。

$$\eta \to \eta' = c\eta \tag{17}$$

$$\int d\eta\eta = \int d\eta'\eta' = \int Jd\eta c\eta \tag{18}$$

より,

$$Jc = 1, \quad J = \frac{1}{c} \tag{19}$$

となり，変数 η の変換とは逆である。

1.4 複素共役

形式的に η の複素共役を $\overline{\eta}$ と定義する。すると,

$$\overline{f}(\eta) = f_0^* + f_1^*\overline{\eta} \tag{20}$$

となる。積は,

$$\overline{f}(\eta)f(\eta) = (f_0^* + f_1^*\overline{\eta})(f_0 + f_1\eta) \tag{21}$$

$$= |f_0|^2 + |f_1|^2\overline{\eta}\eta + f_1^* f_0\overline{\eta} + f_0^* f_1\eta \tag{22}$$

となる。これは，正定値ではないが，積分

$$\int d\eta d\overline{\eta}\overline{f}(\eta)f(\eta) = |f_1|^2 > 0 \tag{23}$$

$$\int d\eta d\overline{\eta}e^{\overline{\eta}\eta}\overline{f}(\eta)f(\eta) = |f_0|^2 + |f_1|^2 > 0 \tag{24}$$

は正定値である。

ガウス積分

$$\int dzd\overline{z}e^{-\lambda\overline{z}}z = \frac{\pi}{\lambda}, \quad \text{複素ガウス積分} \tag{25}$$

$$\int d\overline{\eta}d\eta e^{-\lambda\overline{\eta}\eta} = \lambda, \quad \text{反可換数ガウス積分} \tag{26}$$

フェルミオンベクトル空間

二つの規格直交状態 $|0\rangle, |1\rangle$

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} \tag{27}$$

と反可換数の対 $\eta, \overline{\eta}$ から定義される状態

$$|0\rangle + \eta|1\rangle, \quad \langle 0| + \langle 1|\overline{\eta} \tag{28}$$

の内積は,

$$(\langle 0| + \langle 1)|(\overline{\eta}|0\rangle + \eta|1\rangle) = 1 + \overline{\eta}\eta \tag{29}$$

となる。

2　物理定数表

真空中の光の速度	$c = 299792458\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
プランク定数	$h = 6.6260693(11) \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s}$
電子の電荷	$e = 1.60217653(14) \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
電子の質量	$m_{\mathrm{e}} = 0.510998918(44)\ \mathrm{MeV}{\cdot}c^{-2}$
	$= 9.1093826(16) \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
陽子の質量	$m_{\mathrm{p}} = 938.272029(80)\ \mathrm{MeV}{\cdot}c^{-2}$
	$= 1.67262171(2) \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
真空中の誘電率	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.854187817\cdots \times 10^{-12}\ \mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$
真空中の透磁率	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N{\cdot}A^{-2}}$
微細構造定数	$\alpha = 7.297352568(24) \times 10^{-3}$
	$= 1/137.03699911(46)$
万有引力定数	$G_{\mathrm{N}} = 6.6742(10) \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$
アボガドロ数	$N_{\mathrm{A}} = 6.0221415(10) \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
ボルツマン定数	$k = 1.3806505(24) \times 10^{-23}\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$

問題略解とヒント

1章

1.3 ヒント：

$$f(t) = e^{tA}e^{tB}$$

$$\dot{f}(t) = H(t)f(t), \quad H(t) = [A + e^{tA}Be^{-tA}]$$

この方程式は，時間に依存するシュレーディンガー方程式とほぼ同じ形の 1 階微分方程式である。$f(t)$ は T 積を使う逐次近似で表され，$f(1)$ が求める結果である。

2章

2.1 略解：エネルギーは，電荷密度とポテンシャルを使い，

$$U = \frac{1}{2}\int d^3x\, \rho(x)\varphi(x) \tag{A.1}$$

$$\varphi(x) = \int d^3y\, G(x-y)\rho(y) \tag{A.2}$$

と表せる。ここで電荷密度と電場，ならびにポテンシャルと電場の関係式から

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int d^3x\, \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}\varphi(x) = -\frac{1}{2}\epsilon_0 \int d^3x\, \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi(x) \tag{A.3}$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon_0 \int d^3x\, \boldsymbol{E}^2 \tag{A.4}$$

となる。同様に電流密度とベクトルポテンシャルから，エネルギーは

$$U = \frac{1}{2}\int d^3x\, \boldsymbol{j}(x)\cdot\boldsymbol{A}(x) \tag{A.5}$$

$$\boldsymbol{A}(x) = \int d^3y\, G(x-y)\boldsymbol{j}(y) \tag{A.6}$$

と表せる。ここで電流密度と磁場 (磁束密度)，ならびにベクトルポテンシャルと磁場の関係式から

$$U = \frac{1}{2}\mu_0 \int d^3x \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}(x)\cdot\boldsymbol{A}(x) = -\frac{1}{2}\mu_0 \int d^3x \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(x) \tag{A.7}$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 \int d^3x \boldsymbol{H}^2 \tag{A.8}$$

となる。

3章

3.1 代表点として,

$$x - x' = (0,1,0,0) \tag{A.9}$$

を選び, $(0,-1,0,0)$ に移る座標変換が存在することを示す。

$(x-x')_3$ 軸まわりの大きさ π の回転で各成分は

$$(x-x')_1 \to -(x-x') = -1 \tag{A.10}$$

$$(x-x')_2 \to -(x-x')_2 = 0 \tag{A.11}$$

$$(x-x')_3 \to (x-x')_3 = 0 \tag{A.12}$$

と変換される。よって,

$$x - x' \ \to \ (0,-1,0,0) = -(x-x') \tag{A.13}$$

となる。

他の任意の spacelike な関係にある二つの時空座標 x と x' で同じことが示せる。

なお, timelike な関係にある場合, たとえば $x-x'=(1,0,0,0)$ では

$$(x-x')_0 \to \cosh\theta > 0 \tag{A.14}$$

となり, このような変換は存在しない。

3.6 サイン・ゴードン方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 \varphi(x_1) = K \sin c\varphi \tag{A.15}$$

ヒント：ポテンシャル中の質点の運動と等価な方程式である。

3.7 集団座標の交換関係

ヒント：場で構成された四元運動量と回転ならびにローレンツ変換の生成子が満たすポアンカレ群の交換関係を使う。

スカラー場の自己エネルギー

ファインマンパラメーター積分を行い分母を一つにまとめたあと, N 次元法で 2 運動量の積分を行い,

$$\begin{aligned}
\Sigma^2(p) &= \frac{6\lambda^2}{(2\pi)^8} 2! \int_0^1 dxdy \int dq_1 dq_2 \\
&\quad \times \frac{1}{[(1-x-y)(q_1^2+m^2) + y(q_2^2+m^2) + x((p-q_1-q_2)^2+m^2)]^3} \\
&= \frac{6\lambda^2}{(2\pi)^8} 2! \int_0^1 dxdy (\pi)^N \frac{\Gamma(3-N)}{\Gamma(3)} \left((x+y)(1-y)-x^2\right)^{N/2-1} \\
&\quad \times \left(\left(x(1-y)y + x^2(1-y) - x^2y - 2x^3\right) p^2 + \left((x+y)(1-y)-x^2\right) m^2\right)^{N-3}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

を得る。次に，$N=4+\epsilon$ とおいて ϵ について極を分離して

$$\Gamma(-1+\epsilon) = -1\left[\frac{1}{\epsilon} + \psi(2) + O(\epsilon)\right]$$
$$A^{1+\epsilon} = A(1+\epsilon \log A)$$

を使う。

4章

4.1 ヒント：交換関係を使う。

4.3 光子が，有限質量をもつ場合や誘電率や透磁率をもつ場合のエネルギー分散の式を使う。

4.5 式 (4.165) を使い式 (4.166) と (4.167) が成り立つことを示せ。

4.6 ヒント： チェレンコフ放射の状況では，素過程のエネルギー運動量の保存則を保ちながら荷電粒子が光子を放出できる。

4.7 式 (4.167) の分極ベクトルは，質量が m と $-m$ で異なる。

5章

5.1 ヒント：$(A_x, A_y) = B(y, 0)$ のゲージで x 方向で格子間隔の q 倍の周期性があることを使う。

5.2 ヒント：ランダウ・ギンツブルグ作用，

$$S = \int dx(\partial_\mu + i2eA_\mu)\varphi^\dagger(\partial_\mu - i2eA_\mu)\varphi - V(\varphi^\dagger\varphi) \tag{A.17}$$

5.3 回転不変性に注意する。

6章

6.1 略解：相対論的な不変性をもつ系では，外部弱電磁場と電子との相互作用は，一電子状態ではさんだ電流演算子の期待値

$$\langle p_1|j_\mu(0)|p_2\rangle = \bar{u}(p_1)\left(\gamma_\mu F_1(p) + \sigma_{\mu\nu}\frac{(p_1-p_2)^\nu}{m}F_2(p)\right)u(p_2) \tag{A.18}$$

で定義される $F_1(q)$ と $F_2(q)$ から決定される。ここで，繰り込み条件から，

$$F_1(0) = 1 \tag{A.19}$$

が満たされている。

弱磁場中での伝播関数は

$$\int dxdy\, e^{ip_1x - ip_2y}\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(y))|0\rangle = i(2\pi)^4\delta(p_1-p_2)S_F(p_1) \tag{A.20}$$

$$S_F(p) = \frac{1}{\gamma(p+eA) - m - \Sigma((\gamma(p+eA)-m)^2)} \tag{A.21}$$

$$(S_F(p))^{-1} = \gamma(p+eA) - m - \Sigma((\gamma(p+eA)-m)^2) \tag{A.22}$$

$$((S_F(p))^{-1})^2 = ((p+eA))^2 - m^2 + \text{higher orders} \tag{A.23}$$

である。z 軸方向に一様な磁場があるときのベクトルポテンシャル

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{B}{2}y, \quad A_2 = -\frac{B}{2}x, \quad A_3 = 0 \tag{A.24}$$

を代入して，磁場中の伝播関数から電子エネルギーは

$$(S_F(p))^{-2} = ((p_0)^2 - p^2 - eBl_z - m^2 + \text{higher orders}) \tag{A.25}$$

$$p_0 = (p^2 + m^2 + eBl_z)^{1/2} = m + \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2m}eBl_z \tag{A.26}$$

となる。この各項は非繰り込み定理を満たす。

QED におけるコーンの定理も同様に導けるかもしれない。

6.2 上の $F_2(0)$ は繰り込み条件では決まらず，任意な値をとることが許される。QED の高次補正として計算される。

6.7 電磁場の波動方程式，軸性カレントのアノマリーをもつ保存則，軸性カレントとベクトルカレントの関係式を組み合わせる。

6.8 光子の伝播関数に代入する。

7章

7.1 ヒント：テータ関数のフーリエ展開となる。

7.2 ヒント：q について 1 次の項に二重極モーメントからの寄与があることに注意。

7.4 ヒント：Ward-高橋恒等式の応用。

7.5 強結合電子系でのコーンの定理は，磁場の強さにより異なる。ヒント：(1) 極めて強い磁場：単位包あたりの磁束が磁束単位程度の強磁場では，ランダウ準位は 5 章の問いのように特異なものになる。この場合，コーンの定理はいかなる形をとるか? (2) 強磁場：スペクトルの極小点の近傍だけで閉じた議論をする場合は，エネルギー分散を二次近似して扱う。すると，強結合電子系は通常の非相対論的な電子系と同じにみなせる。

参考書

本書と密接に関連する量子力学や場の量子論のいくつかの参考書や教科書をあげておく。これら以外にたくさんの良い本があるが，頁数の制限から省略させて頂く。

量子力学

- P.M. Dirac, *The Principle of Quantum Mechanics*, Tokyo, Misuzu Shobo, 1963
- L.I. Schiff, *Quantum Mechanics*, Auckland, Tokyo; McGraw-Hills, c 1968
- L.D. Landau and E.M. Lifschtz, *Quantum Mechanics, non-relativistic theory*: translated from Russian by J. B. Sykes and J.S. Bell , Oxford, Pergamon Press, 1977
- 猪木慶二・川合光：「量子力学 I・II」(講談社，1994)
- H.A. Bethe and R.W. Jackiw, *Intermediate Quantum Mechanics*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1997
- A.B. Migdal, *Qualitative Methods in Quantum Theory*, translated from Russian by A.J. Legget, Reading, Mass., Benjamin, 1977
- R.P. Feynmann and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integral*, New York, McGraw-Hill, 1965
- 崎田文二・吉川圭司：「径路積分による多自由度の量子力学」(岩波書店，1986)
- K. Gottfried and T.-M. Yan, *Quantum Mechanics: Fundamentals*, 2nd ed., Springer-Verlag, 2003

固体電子の場の量子論

- A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov and I.E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, translated and edited by R.A. Silverman, New York, Dover Pub. 1975
- J.R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, 3rd ed., Reading, Mass., Addison-Wesley, Tokyo, 1983
- P.W. Anderson, *Concepts in Solid : ectures on the theory of solid*, Redwood City, Cal., Addison-Wesley, 1992

- A.L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, New York, McGraw-Hill, c1971
- G.D. Mahan, *Many-Particle Physics*, 3rd ed., New York, Klever Academic/Plenum., 2000
- 高橋康：「物性研究者のための 場の量子論 I・II」(培風館, 1974)
- 近藤淳：「金属電子論：磁性合金を中心として」(裳華房, 1983)
- 永長直人：「物性論における場の理論」(岩波書店, 1998)

相対論的場の量子論

- J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Tokyo, 1967
- J. Bjorken and S. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, Tokyo, McGraw-Hill, 1998; *Relativistic Quantum Fields*, 1998; Tokyo, McGraw-Hill, 1965
- C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, Tokyo, 1980
- P. Ramond, *Field Theory：A Modern Primer*, 2nd ed., Tokyo, Addison-Wesley, 1990
- 西島和彦：「場の理論」(紀伊国屋書店, 1987)
- 九後汰一郎：「ゲージ場の量子論 I・II」(培風館, 2001)
- 藤川和男：「ゲージ場の理論」(岩波書店, 1997)
- M.E. Peskin and D.V. Schreder,*An Introduction to Quantum Field Theory*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1995
- S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, 1996
- A.M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, New York, Harwood Academic, 1987

量子ホール効果

- 吉岡大二郎：「量子ホール効果」(岩波書店, 1998)
- 中島龍也・青木秀夫：「分数量子ホール効果」(東京大学出版会, 1999)
- R. E. Prange and S.M. Girvin, *The Quantum Hall Effect*, 2nd ed., New York, Springer-Verlag, 1990

索　引

あ　行

か　行

さ 行

た 行

な 行

は 行

ま 行

や 行

ら 行

石川健三（いしかわ けんぞう）略歴

1971年　東京工業大学理工学部物理学科卒業
1976年　東北大学大学院博士課程修了，理学博士，
　　　　日本学術振興会奨励研究員
1977年　東北大学原子核理学研究施設研究員
1977～1980年　UCLA研究員，準助教授
1980～1982年　DESY研究員
1982～1983年　New York市立大学研究員
1983年　北海道大学理学部助手
1985年　北海道大学理学部助教授
1989年　北海道大学理学部教授
現　職　北海道大学大学院理学研究科教授

© 石川健三 2006

2006年7月20日　初版発行
2007年9月25日　初版第2刷発行

物理学基礎シリーズ9
場の量子力学

著　者　石川健三
発行者　山本　格
発行所　株式会社 培風館
東京都千代田区九段南4-3-12・郵便番号102-8260
電話(03)3262-5256(代表)・振替00140-7-44725

D.T.P. アベリー・平文社印刷・三水舎製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN978-4-563-02389-8 C3342